Trainingsaufgabe Analysis 03

Gegeben sind sie hyperbolischen Funktionen **sinh** („Sinus hyperbolicus“) , **cosh** („Cosinus hyperbolicus“) und **tanh** („ Tangens hyperbolicus“) mit folgender Definition:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

3.1 Zeige a) sinh‘(x) = cosh(x) b) cosh‘(x) = sinh(x) c)

3.2 Untersuche die Funktion $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuche die Funktion auf Symmetrie

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion

c) Untersuche die Funktion auf Monotonie, Extremstellen und Wendestellen

d) Untersuche das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$

e) Skizziere mit den bisherigen Angaben den Graphen zu **tanh**

f) Begründe, warum **tanh** eine Umkehrfunktion **artanh** besitzt und bestimme den Definitionsbereich von **artanh** („area tangens hyperbolicus“)

g) Bestimme die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion **artanh**

Hinweis: $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ zurKontrolle: $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

und leite die Funktion artanh ab .

h) Bestimme eine Stammfunktion zu **tanh**

Hinweis: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + c \quad ; f(x) > 0$

i) Zeige durch Ableiten, $H(x) = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1 - x^2)$; $x \in]-1;1[$ dass

eine Stammfunktion zu **artanh** ist.

Lösung AN03

3.1

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \sinh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x})}{2} = \cosh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cosh'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

3.1 f(x)=tanh(x) Wegen $\cosh(x) \neq 0$ für alle x gilt $D_f = \mathbb{R}$

a) $$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{e^{-x} + e^{+x}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\tanh(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

d.h. tanh ist punktsymmetrisch zu (0/0)

b)

$$\tanh(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

$$\tanh(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$ N(0/0)

c)

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

d.h. tanh ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

$$\tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0 \;\; \textit{besitzt} \;\; \tanh \textit{keine Extremstellen.}$$

$$\tanh''(x) = \left(4(e^x + e^{-x})^{-2}\right)' = 4 \cdot (-2) \quad (e^x + e^{-x})^{-3} \cdot (e^x - e^{-x})$$

$$= -8 \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3}$$

tanh''(0)=0 d.h. mögliche Wendestelle bei x=0

Da tanh''(x)>0 für x>0 und tanh''(x)<0 für x<0 ist (0/0) sowohl die einzige Nullstelle, als auch die einzige Wendestelle.

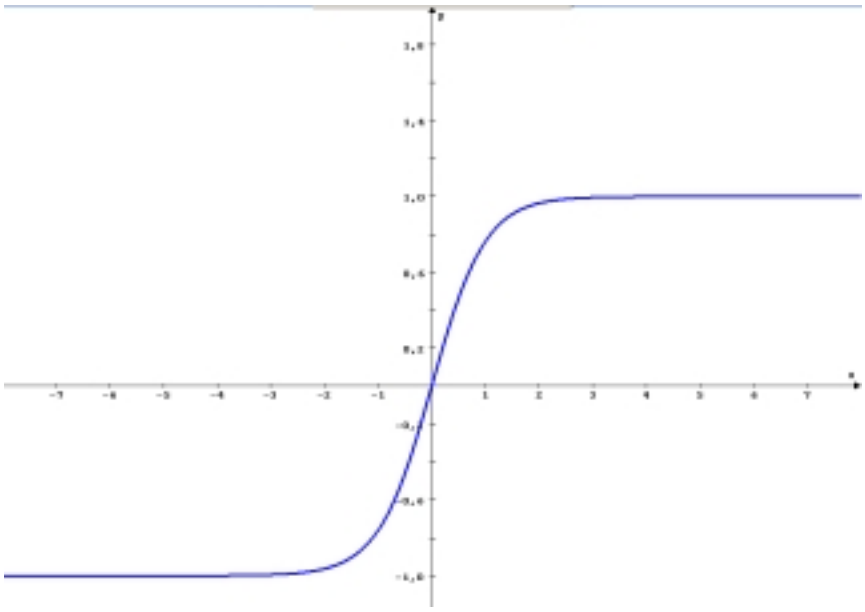
d) $$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} e^{2x}$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-2x} = 0+ \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0+$$

gilt

$$\lim_{x \to \infty} \tanh(x) = 1- \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1+$$



e) tanh ist nach 3.2c) streng monoton steigend also umkehrbar:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow y \cdot (e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(y - 1) = -1 - y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

also gilt für die Umkehrfunktion :

$$\text{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$D_{\text{artanh}} = W_{\tanh} =]-1;1[$$

$$\text{artanh}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) \cdot \frac{1 \cdot (1 - x) - (1 + x) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

f) $\int \tanh(x)dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}dx = \int \frac{\cosh'(x)}{\cosh(x)}dx = \ln(\cosh(x)) + c$

g)

$$H(x) = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1 - x^2) \quad ; \quad x \in]-1;1[$$

$$H'(x) = 1 \cdot \operatorname{artanh}(x) + x \cdot \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= \operatorname{artanh}(x) \qquad x \in]-1;1[$$