Aufgabe 4 Abiturprüfung 2007 (GK) Analytische Geometrie

als Übungsaufgabe für den Kurs MSS 2008 ML1 ZIM

Gegeben ist eine Schar E_a von Ebenen in Normalenform

$$E_k: \ (k+1)x + ky + (k-1)z - k = 0 \quad \text{mit } k > 1$$

4.1 Untersuchen Sie die Lage der Ebene E_0 und skizzieren Sie die Lage in einem geeigneten Koordinatensystem.

4.2 Begründen Sie, warum die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in jeder der Ebenen E_k enthalten ist. Welcher geometrische Zusammenhang besteht damit zwischen den Ebenen E_k und der Gerade g ?

4.3 Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_x; S_y und S_z mit den Koordinatenachsen x,y,z in Abhängigkeit von k.

Zur Kontrolle : $S_x = (\frac{k}{k+1} | 0 | 0)$ $\quad S_y = (0 | 1 | 0)$ $\quad S_z = (0 | 0 | \frac{k}{k-1})$

4.3.1 Die Punkte O; S_x; S_y und S_z bilden eine Pyramide. Bestimme das Volumen dieser Pyramide.

4.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_2 in Parameterform

4.6.1 können wir zur Zeit noch nicht!

4.6.2 Zeigen Sie, dass $E_2 \perp E_{-\frac{1}{3}}$ gilt.

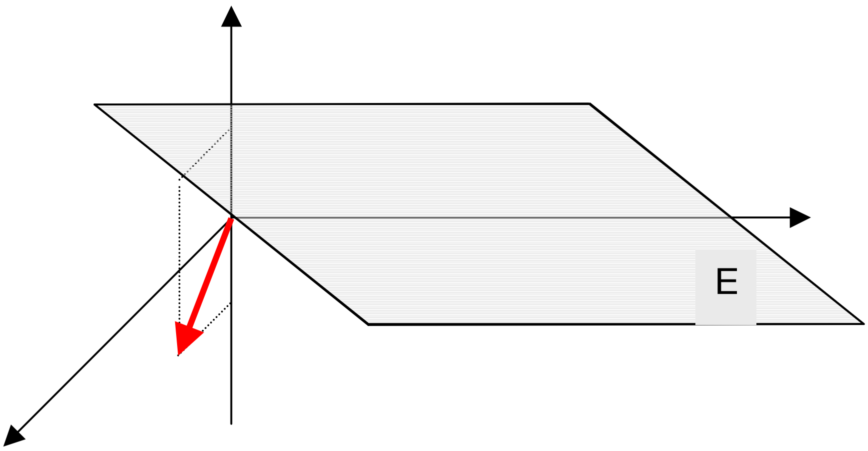
4.7 Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E_2 vom Ursprung O(0|0|0)

4.8 Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene E, die parallel zu E_2 ist und die den Ursprung (0|0|0) enthält.

Lösungsskizze Aufgabe 3 Analytische Geometrie LK

4.1

$E_0: \quad x - z = 0 \qquad \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad O(0|0|0) \in E_0$



5

E ist die Winkelhalbierende der Ebenen E_{xz} und E_{xy}

4.2

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$E_k: \ (k+1)x + ky + (k-1)z - k = 0 \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

$$(k+1)\lambda + k(1-2\lambda) + (k-1)\lambda - k \overset{?}{=} 0 \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

$$k\lambda + \lambda + k - 2k\lambda + k\lambda - \lambda - k = 0 \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

d.h. $g \subset E_k$

d.h. g ist die gemeinsame Schnittgerade aller Ebenen. 6

4.3 $S_x=(a|0|0)\quad S_y=(0|b|0)\quad S_z=(0|0|c)$

$E_k:\ (k+1)x+ky+(k-1)z-k=0 \quad \text{mit } k\in\mathbb{R}$

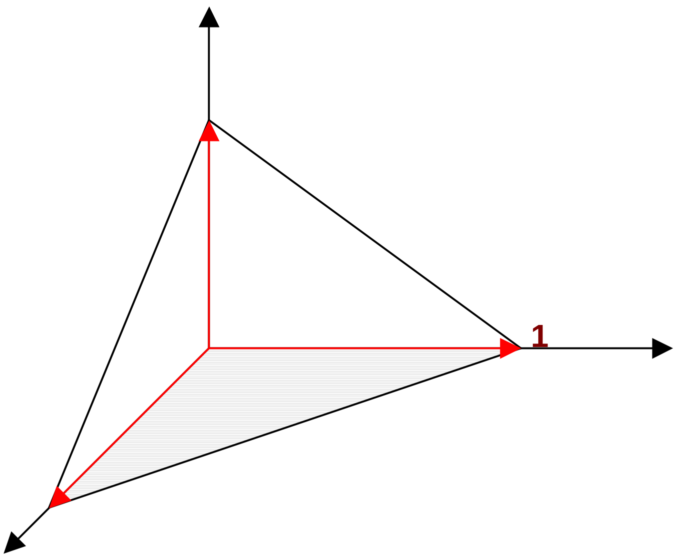
$(k+1)a-k=0\Rightarrow a=\dfrac{k}{k+1}$ falls $k\neq -1$ sonst keine Lösung

$kb-k=0\Rightarrow b=1$ falls $k\neq 0$ sonst ist b beliebig vgl. Skizze von E_0

$(k-1)c-k=0\Rightarrow c=\dfrac{k}{k-1}$ falls $k\neq 1$ sonst keine Lösung

$S_x=(\dfrac{k}{k+1}|0|0)\ k\neq -1 \quad S_y=(0|1|0)\ k\neq 0 \quad S_z=(0|0|\dfrac{k}{k-1})\ k\neq 1$ **7**

4.4



$S_x=(\dfrac{3}{4}|0|0)\quad S_y=(0|1|0)\quad S_z=(0|0|\dfrac{3}{2})$

$$V_3=\frac{1}{3}Gh=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot1\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16}$$

3

4.5

$$E_2: \vec{x} = \vec{o} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2

4.6.1 $\alpha = \sphericalangle(\vec{n}_2; \vec{n}_3)$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 + 6 + 2 = 20$$

$$\left|\vec{n}_2\right| = \sqrt{14} \qquad \left|\vec{n}_3\right| = \sqrt{29}$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{27}} \approx 0,993 \Rightarrow \alpha \approx 6,98°$$

4

4.6.2

$$E_2 \perp E_{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{n}_{-\frac{1}{3}}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_{-\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = 2 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

4

4.7

$E_2: \ 3x + 2y + z - 2 = 0$

$$E_2 \text{ HNF}: \ \frac{3x + 2y + z - k}{\sqrt{14}} = 0$$

$$d(E_2;0) = \left| \frac{-2}{\sqrt{14}} \right| = \frac{2}{\sqrt{14}} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

3

4.8

$E \ : \ 3x + 2y + z - c = 0$

$(0\,|\,0\,|\,0) \in E \ \Rightarrow c = 0$

$E \ : \ 3x + 2y + z = 0$

3

$\Sigma = 37$