Dieses Skript stammt von Eckehard Wendel 2005/06 und wurde überarbeitet und ergänzt von Wolfgang Zimmer 2006

# Kapitel I

# Beschreibende Statistik

Einführungsbeispiel: Notenspiegel einer Klassenarbeit:

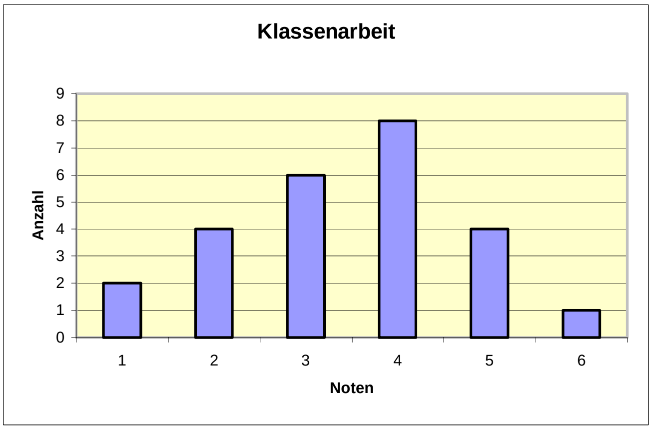
1.Klassenarbeit:

| Note | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 2 | 4 | 6 | 8 | 4 | 1 |

Statistische Erhebungen untersuchen **Merkmalsträger** (hier: Schüler) hinsichtlich eines bestimmten **Merkmals** (hier: Note).

Das Merkmal kann verschiedene **Merkmalswerte** (**Merkmalsausprägungen**) haben. (hier: 1; 2; 3; ...; 6).

Die Anzahl des jeweiligen Merkmalswerts heißt **absolute Häufigkeit** (hier: z.B. absolute Häufigkeit der „4“ ist 8).




Der Anteil, den ein Merkmalswert an dem Umfang der gesamten Erhebung hat, heißt relative Häufigkeit (hier: Umfang n = 25; z.B. relative Häufigkeit der „4“ ist 8/25 = 32%).

Die relative Häufigkeit wird als Bruch, als Dezimalzahl oder in Prozenten angegeben.

**Definition**: Es seien $x_1, x_2, ..., x_k$ Merkmalswerte und $n_1, n_2, ..., n_k$ ihre jeweiligen absoluten Häufigkeiten. Ferner sei n der Umfang der statistischen Erhebung. Dann ist die **relative Häufigkeit** $h(x_i)$ des Merkmalswerts $x_i$ mit der absoluten Häufigkeit $n_i$ :

$$\boxed{h(x_i) = \frac{n_i}{n} \quad \text{mit} \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

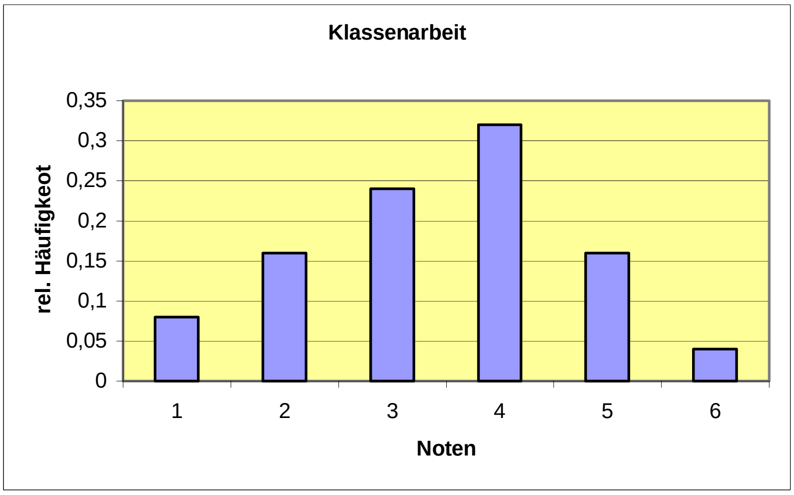
Die relative Häufigkeit eines Merkmalswerts gibt den Anteil an, mit dem der Merkmalswert in der statistischen Erhebung auftritt.

Die relative Häufigkeit ist stets eine Zahl zwischen 0 und 1.

$$0 \leq h(x_i) \leq 1$$

Häufig stellt man relative Häufigkeiten graphisch dar. Sehr gebräuchlich ist das **Histogramm**:

Das Beispiel des obigen Notenspiegels soll dies zeigen.




Die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke sind den einzelnen relativen Häufigkeiten proportional. Hier sind, weil alle Breiten gleich sind, die Höhen den relativen Häufigkeiten proportional.

**Aufgabe 1.1**: Trage die fehlenden relativen Häufigkeiten als reine Brüche und als % in die Rechtecke ein!

**Aufgabe 1.2**: Es wurde mit zwei Würfeln gewürfelt; die Summe der Augenzahlen wurde jeweils beobachtet:

| Augensumme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Absolute Häufigkeit | 9 | 15 | 28 | 35 | 42 | 56 | 49 | 40 | 32 | 19 | 10 |
| Relative Häufigkeit | | | | | | | | | | | |

(a) Was sind hier: Merkmalsträger, Merkmal, Merkmalsausprägungen, Umfang der Erhebung?

(b) Trage die relativen Häufigkeiten ein und stelle das Resultat graphisch dar!

Vielfach ist man am **Mittelwert** von Merkmalswerten $x_1, x_2, ..., x_n$ interessiert. (Wir lassen zu, dass verschiedene Merkmalswerte übereinstimmen, dass also z.B. $x_3 = x_8$ ist.)

Definition: Der Mittelwert (das arithmetische Mittel) $\overline{x}$ der n Merkmalswerte $x_1, x_2, ..., x_n$ beträgt:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Wenn einzelne Merkmalswerte öfters vorkommen, wenn also die <u>verschiedenen</u> Werte $x_1, x_2, ..., x_k$ mit den absoluten Häufigkeiten $n_1, n_2, ..., n_k$ auftreten, kann man den Mittelwert einfacher ausrechnen:

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

**Aufgabe 1.3**: (a) Berechne den arithmetischen Mittelwert der Noten ( oft auch Notendurchschnitt genannt) in dem Einführungsbeispiel!
(b) Vergleiche den obigen Notenspiegel (aus der 1. Klassenarbeit) mit den hier folgenden der 2. und 3. Klassenarbeit!

2. Klassenarbeit:

| Note | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 4 | 3 | 5 | 7 | 3 | 3 |

3. Klassenarbeit:

| Note | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 0 | 3 | 10 | 10 | 2 | 0 |

Neben dem Mittelwert einer statistischen Erhebung interessiert oft auch die Verteilung der Merkmalswerte bzw. ihrer Häufigkeiten. Du hast soeben festgestellt, dass die Mittelwerte der drei Klassenarbeiten gleich sind, aber sicher hast du auch bemerkt, dass die drei Arbeiten ganz verschiedene „Streuungen“ der Noten aufweisen. In der dritten liegen die Noten dichter beim Mittelwert, usw.

Es gibt verschiedene Maße für die **<u>Streuung</u>**. Wir sehen uns zwei Möglichkeiten an.

(1) Die **Empirische Varianz**, kurz auch **Varianz** genannt, oder **mittlere quadratische Abweichung**, geschrieben: $s^2$

Sind $x_1, x_2, ..., x_n$ die Merkmalswerte und $\bar{x}$ der Mittelwert, so bildet man die einzelnen Quadrate der Abweichungen $(x_i - \bar{x})^2$, berechnet ihre Summe und dividiert schließlich das Ergebnis durch n:.

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + ... + (x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

(2) Die Wurzel aus der Empirischen Varianz heißt **Empirische Standardabweichung** oder kurz: **Standardabweichung**, geschrieben: s

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

**Aufgabe 1.4**: Diese Maße sind von Menschen ersonnen und nicht vom Himmel gefallen. Was hat man sich bei ihrer Festlegung wohl gedacht?

(a) Warum hat man wohl die Quadrate der Abweichungen gebildet und nicht die Abweichungen selbst addiert?

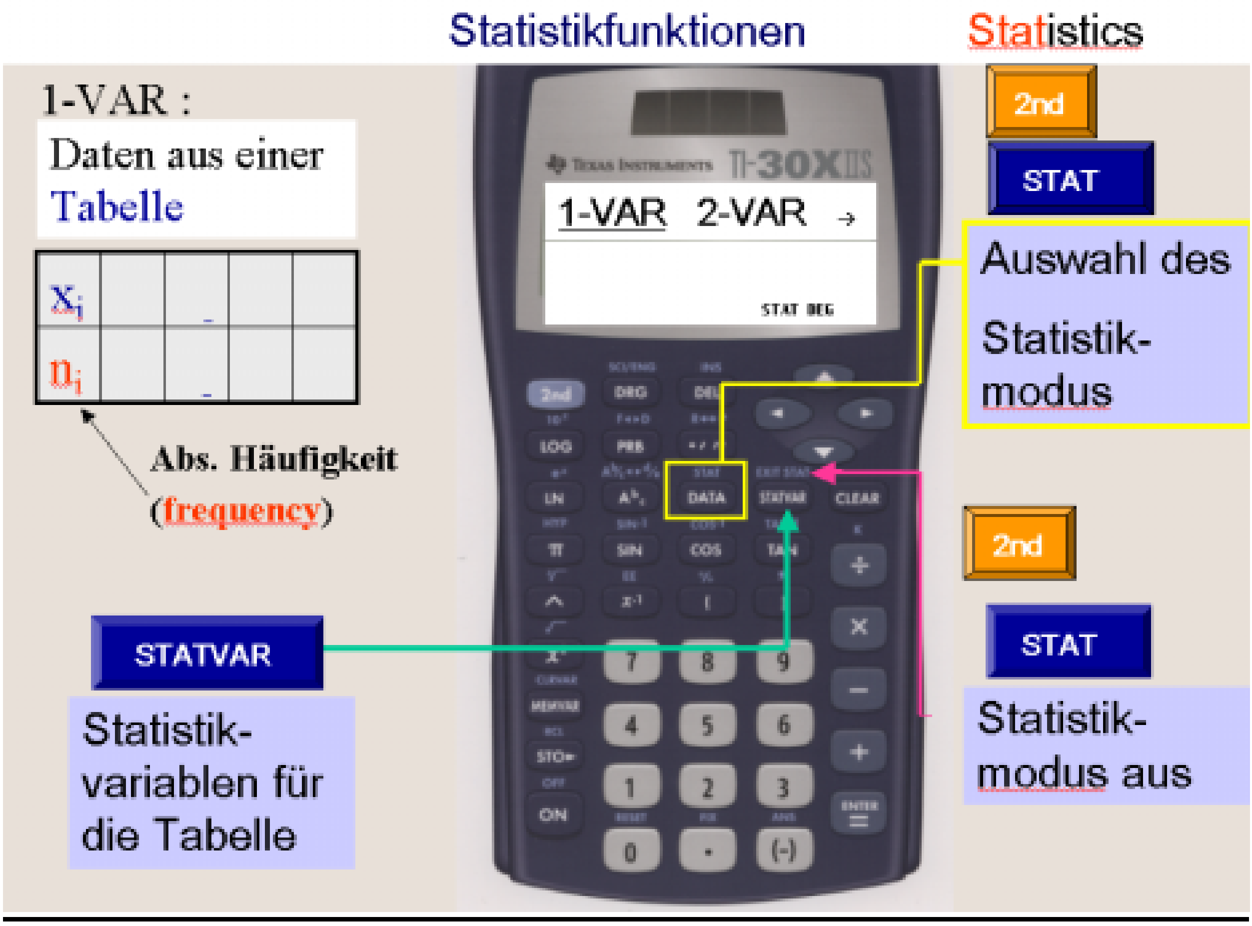
(b) Warum ist es sinnvoll, durch n zu teilen?

(c) Welchen Vorteil hat die Standardabweichung gegenüber der Varianz?
Denkanstoß: Angenommen, die Merkmalswerte wären Zeiten (z.B. $x_1 = 8,2\,\text{sec}$; $x_2 = 7,8\,\text{sec}$ ). Welche Einheiten hätten dann Varianz und Standardabweichung?

**Aufgabe 1.5**: Berechne bei jeder der drei Klassenarbeiten mit dem Taschenrechner

(a) die Varianz

(b) die Standardabweichung!




Eingabe der Tabelle: 1.) mit **2nd STAT** den Statistikmodus einstellen
In der Anzeige erscheint 1-VAR 2-VAR und CLRDATA
**1-VAR mit ENTER auswählen.**

2.) Mit **DATA** beginnt die Eingabe der Daten
**X1=**
Wert eingeben und mit der Cursortaste **Down** ⇩
die Absolute Häufigkeit **FRQ=** eingeben.
Weitere Werte analog mit der Cursortaste **Down** **eingeben.**

3.) mit **STATVAR** können jetzt die Statistikvariablen ausgelesen werden:

**Für Tabelle 1**

| | | |
|---|---|---|
| **n** | **Anzahl der x-Datenwerte** | **25** |
| $\bar{x}$ | **Mittelwert der x-Werte** | **3,44** |
| $s_x$ | **Stichproben-Standardabweichung von x** | **1,29** |
| $\sigma_x$ | **Grundgesamtheit-Standardabweichung von x** | **1,27** |
| $\Sigma x$ | **Summe aller x-Werte** | **86** |
| $\Sigma x^2$ | **Summe aller $x^2$-Werte** | **336** |

**Hinweis der Taschenrechner berechnet die Standardabweichung $\sigma_x$ mit der Beziehung**

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^{\,2}-(\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i)^2}{n^2}}$$

**Wie kommt man darauf ?**

$$s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

$$=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+...+n_k(x_k-\overline{x})^2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\overline{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i^{\,2}-2x_i\,\overline{x}+\overline{x}^2)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}-\frac{2}{n}\overline{x}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i+\frac{1}{n}\overline{x}^2\underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i}_{=n}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}-\overline{x}^2$$

$$=\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}-(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)^2}{n^2}$$

**Die Stichprobenstandardabweichung wird mit**

$$s_x^{\,2}=\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}-(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)^2}{n\cdot(n-1)}$$

**berechnet.**

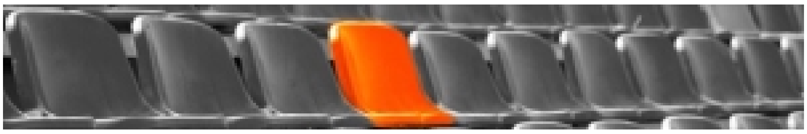
# Kapitel II

# Grundformeln der Kombinatorik

Fragestellung der Kombinatorik:

## *Wie viele Möglichkeiten, Anordnungen, Kombinationen .... gibt es?*

**Problem 2.1:**



10 Leute sollen auf 10 nebeneinander stehenden Stühlen Platz nehmen. Sie können sich nicht einigen, wer neben wem sitzt, und beginnen schließlich eine Diskussion, wie viel mögliche Sitzordnungen es überhaupt gibt.

**Aufgabe 2.1**: Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems! Wie lange bräuchten sie, wenn sie jede Sekunde eine neue Sitzordnung einnehmen, keinen Schlaf brauchen, Essen und Trinken ausfallen lassen, nicht auf die Toilette müssen, usw.?

Ein neues mathematisches Rechenzeichen: **Fakultät**, geschrieben: „**!**“

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, wobei n = 1; 2; 3; ... ist.

Zusätzlich hat man festgelegt: 0! = 1 ; 1! = 1

**Satz 1**: Für n Elemente gibt es n! verschiedene Anordnungen.

Man spricht auch von **Permutationen aus n Elementen** statt von Anordnungen.

**Problem 2.2**: 10 Personen wählen aus ihren Reihen einen Sprecher, einen ersten und einen zweiten Stellvertreter. Wie viel Möglichkeiten gibt es, die 3 Ämter zu besetzen?

**Aufgabe 2.2:** Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems!

**Satz 2**: Für n Elemente gibt es $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene k-elementige Anordnungen ohne Wiederholung. Hier muss $1\le k\le n$ sein!

**Problem 2.3**: 10 Personen in einem Zeltlager haben an einem bestimmten Tag 4 Pöstchen zu vergeben: Z.B. soll einer den Platz reinigen, einer soll Holz besorgen, einer soll einkaufen gehen, einer soll kochen. Es darf auch sein, dass eine Person zwei oder drei Pöstchen oder gar alle vier wahrnimmt! Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es?

**Aufgabe 2.3:** Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems!

**Satz 3**: Für n Elemente gibt es $n^k$ verschiedene k-elementige Anordnungen mit Wiederholung. Hier darf k > n sein!

**Problem 2.4**: Aus 10 SchülerInnen sollen 4 ausgewählt werden, die ein Rateteam bilden. Wie viele Konstellationen gibt es aus den 10 SchülerInnen 4 auszuwählen?

**Aufgabe 2.4:** Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems!

Ein neues mathematisches Rechenzeichen: „**n über** k“, geschrieben: $\binom{n}{k}$

Satz 4 : Eine n-elementige Menge hat

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

k-elementige Teilmengen.

Merke: In einer Menge kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an, in der diese auftreten. Es geht nur darum welche Elemente in der Menge enthalten sind!

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ werden auch **Binomialkoeffizienten** genannt.

Es gibt hier einen auf den ersten Blick überraschenden Zusammenhang mit den Binomischen Formeln (Luigi Binomi  1484-1543) und dem Pascal'schen Dreieck mit dem man die Koeffizienten der Summanden in den Binomischen Formeln ermitteln kann.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 1
1 1
1 1

Blaise Pascal 1623-1662

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Damit ergibt sich der allgemeine Binomische Lehrsatz zu

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$$

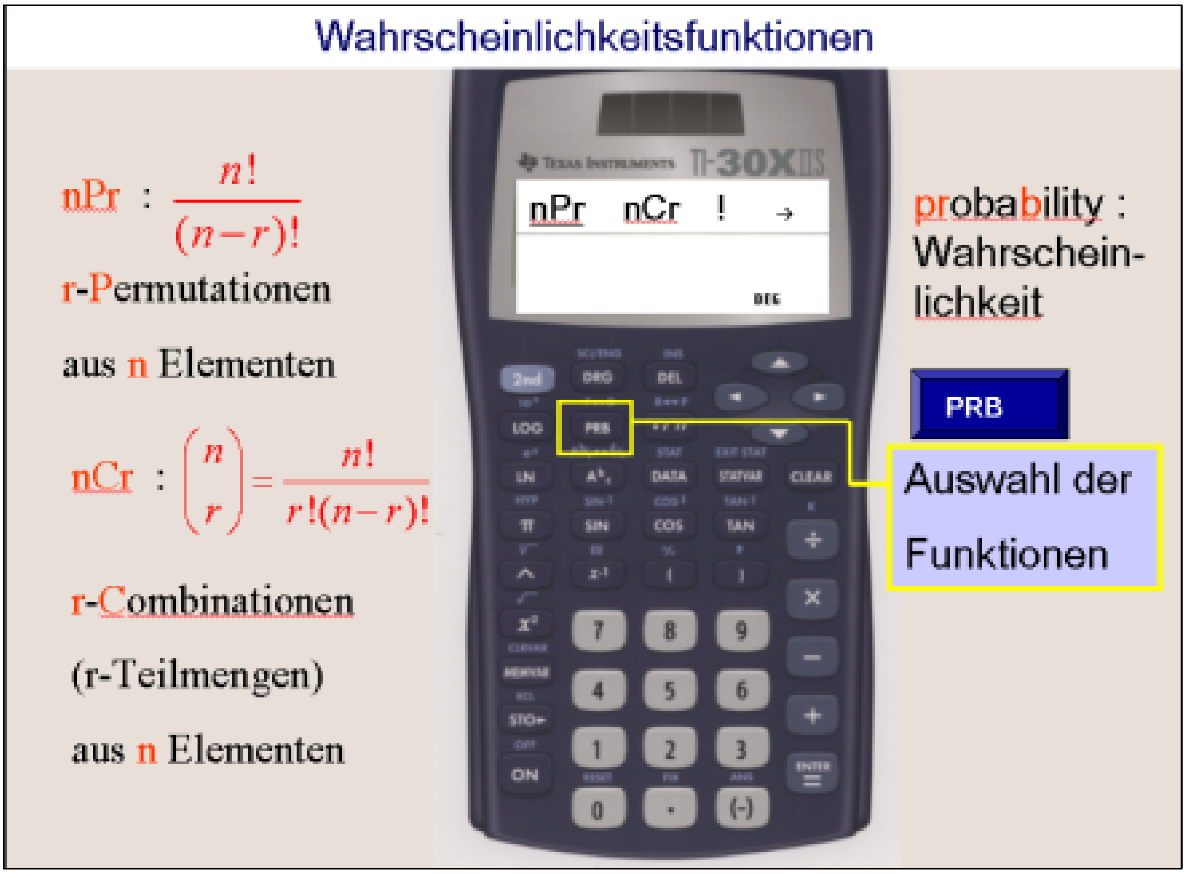
Zusammenfassung der vier **Grundformeln der Kombinatorik**:

Neben der hier entwickelten Vorstellung, dass „Elemente“ sortiert, ausgesucht, kombiniert, usw. werden, gibt es eine anderes, sehr anschauliches Modell: Man hat in einer **Urne** eine Anzahl Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind. Dieser Urne werden nun Kugeln mit oder ohne Zurücklegen entnommen wobei die Reihenfolge registriert oder nicht registriert wird.

| **Urnenexperiment**<br>In einer Urne sind n unterscheidbare Kugeln, z.B. nummeriert von 1 bis n | Anzahl der Möglichkeiten | **Realexperiment**<br>Wir haben n unterscheidbare Objekte |
|---|---|---|
| **Permutationen**<br><br>Alle n Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge wird notiert. | $n!$ | Es gibt n! verschiedene Anordnungen (Permutationen) mit n unterscheidbaren Objekten..<br>Wir bilden also<br>**n-Tupel**:<br>( \| \| ……\| \| \| ) |
| **k-Permutationen-ohne (Variationen)**<br>k der n Kugeln $(k \leq n)$ werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge wird notiert. | $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1$<br>$= \frac{n!}{(n-k)!}$ | Es werden k der n Objekte ausgewählt und diese dann in alle mögliche Reihenfolgen gebracht<br><br>**k-Tupel**:<br>( \| \| …\| \| ) |
| **k-Permutationen-mit (Variationen)**<br>k der n Kugeln $(k \leq n)$ werden nacheinander mit Zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge wird notiert. | $n^k$ | Es werden k der n Objekte mit Zurücklegen ausgewählt und diese dann in alle mögliche Reihenfolgen gebracht<br><br>**k-Tupel**:<br>( \| \| …\| \| ) |
| **k-Teilmengen (Kombinationen)**<br>k der n Kugeln $(k \leq n)$ werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge | $\binom{n}{k}$ | Nacheinander werden k Kugeln (ohne Zurück-legen) entnommen, es wird keine Reihenfolge gebildet.<br><br>**k-Teilmengen**:<br>{ , , … , } |

Bemerkung: k-Teilmengen mit Zurücklegen machen keinen Sinn, da ein Element in einer Menge definitionsgemäß nur einmal auftreten darf.

Berechnung dieser Ausdrücke mit dem Taschenrechner:




**Berechnung von 10! :**

1. 10 eingeben
2. **PRB-Taste drücken**
3. **Markierung mit Cursortasten auf ! bewegen**
4. **Entertaste drücken**

→ **Ergebnis 10!=3628800**

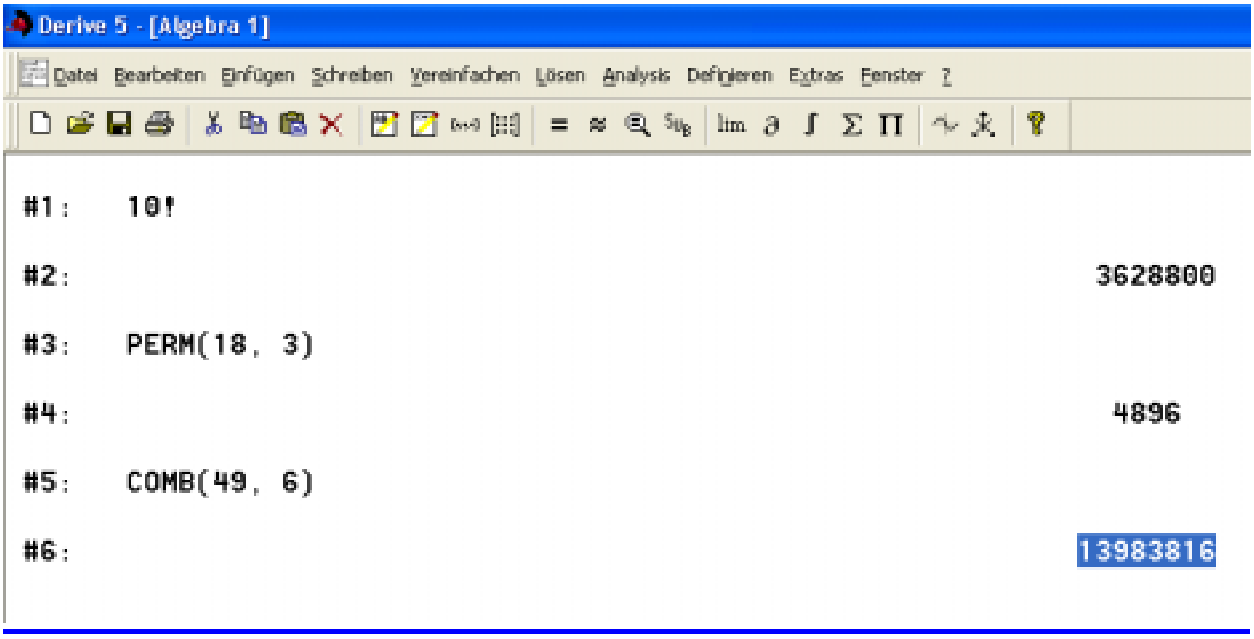
**Berechnung von** $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!}$

1. 49 eingeben
2. **PRB-Taste drücken**
3. **Markierung mit Cursortasten auf nCr bewegen**
4. **Entertaste drücken**
4. **6 eingeben**
4. **Entertaste drücken**

→ **Ergebnis** $\binom{49}{6} = 13983816$

Analog erhält man mit **nPr** $\frac{18!}{(18-3)!} = 4896$

Berechnung dieser Ausdrücke mit Derive:



**Aufgabe 2.5**: Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tippzettel beim Fußball-Toto auszufüllen? (Untereinander stehen 10 Spiele, bei jedem muss 0 oder 1 oder 2 angekreuzt werden?

**Aufgabe 2.6**: Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Lotterieschein „6 aus 49“ auszufüllen? (Von 49 Zahlen müssen 6 angekreuzt werden.)

**Aufgabe 2.7**: Ein Handlungsreisender will auf einer Rundreise in irgend einer Reihenfolge die Städte Leipzig, Dresden, Chemnitz, Halle, Naumburg, Erfurt und Zwickau besuchen.

(a) Wie viele mögliche Wege gibt es ?
(b) Wie viele Wege gibt es, wenn er auf jeden Fall in Leipzig die Reise antritt und am Ende dorthin wieder zurückkehrt?

**Aufgabe 2.8**: The English alphabet has 26 letters of which 5 are vowels.
a) How many 5-letter words containing three different consonants and two different vowels can be formed?
b) How many of them contain the letter b ?
c) How many of them contain the letters b and c ?
d) How many of them begin with b and contain the letter c ?
e) How many of them begin with a and end with b?
f) How many of them contain the letters a, b, c ?

**Aufgabe 2.9**: Simplify:

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{n!}{(n-2)!}$ c) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ d) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

**Aufgabe 2.10**:
a) In how many ways can 3 boys and 2 girls sit in a row
b) In how many ways can they sit in a row if the boys and the girls are each to sit together ?
c) In how many ways can they sit in a row if just the girls are to sit together ?

# Kapitel III

# Zufallsversuch, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit

**Begriffe:**

Ein *Zufallsversuch* (***Zufallsexperiment***) ist ein Vorgang bei dem sich Ergebnisse beobachten lassen, die prinzipiell nicht vorhersagbar sind.
Die Menge aller denkbaren ***Ergebnisse*** bildet den ***Ergebnisraum*** ***bzw. die Ergebnismenge***. Wir nennen ihn S.

**Beispiele für** *Zufallsexperimente* **:**

1. Ein Würfel wird einmal geworfen und die Augenzahl wird beobachtet
   Die Ergebnisse sind: 1, 2, 3, ...
   Der Ergebnisraum ist S $=\{1;2;3;...;6\}$

2. Eine Münze wird einmal geworfen und die oben legende Seite wird beobachtet
   Die Ergebnisse sind W = Wappen, Z = Zahl
   S = $\{W;Z\}$

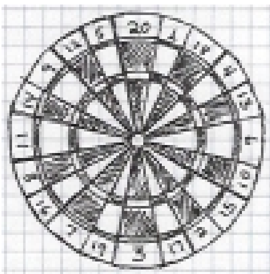
3. Über eine stark befahrene Straße laufen und Feststellung, wie man rüber kommt..
   Die Ergebnisse sind: Entweder kommt man unverletzt drüber (+) oder man wird angefahren (-)
   S = $\{+;-\}$

4. Eine Münze wird zweimal geworfen und die oben legende Seite wird jeweils beobachtet
   Auf die Reihenfolge soll es a) ankommen b) nicht ankommen
   a) Die Ergebnisse sind Paare: $(W;W);(W;Z);(Z;W);(Z;Z)$
   S = $\{(W;W);(W;Z);(Z;W);(Z;Z)\}$
   b) Ergebnisse $2W;\ 2Z;\ 1W1Z$
   S = $\{2W;\ 2Z;\ 1W1Z\}$

5. Auslosen eines Gewinners bei einer Tombola.
   Die Ergebnisse sind Personen $P_1$; $P_2$;....... $P_n$ , die an der Tombola teilgenommen haben.
   S = $\{$P1; P2;....... ;Pn$\}$

6. Wurf eines Dartpfeils auf eine einfache Dartscheibe und Feststellung der Punktzahl

   Darts making it on the board score in the following manner: In the wedge: the amount posted on the outer ring. The double ring (the outer, narrow ring): twice the number hit. The triple ring (the inner, narrow ring): three times the number hit. Bulls eye (outer bull): twenty-five points. Double bulls eye (inner bull): fifty points.



Ergebnisse 0,1,2,...20,22,24,26,...40,21,27,33,39,42,45,48,...60,25,50

$S = \{0,1,2,...20,22,24,26,...40,21,27,33,39,42,45,48,...60,25,50\}$

7. Ziehen einer Karte aus einem normalen Stapel von Skatkarten und Feststellung des Blatts
   Ergebnisse: ♣7 ... ♣10 ♣D ♣B ♣K ♣A ...... .. ♦7... ♦A
   S = {♣7 ... ♣10 ♣D ♣B ♣K ♣A ......... ♦A}

**Bem.:** • Bei einem Zufallsexperiment muss ich sehr genau angeben, was ich beobachte. Nur dann kann ich den Ergebnisraum exakt angeben.
• Es gibt <u>endliche</u> und <u>unendliche</u> Ergebnismengen.

**Aufgabe 3.1:** Bestätige diese beiden Feststellungen!

**Aufgabe 3.2:** Bestimme „den“ Ergebnisraum der folgenden Zufallsversuche:

(a) Ein Passant wird zufällig ausgewählt und sein Geburts**tag** (tt.mm.)wird festgestellt
(b) Ein Passant wird zufällig ausgewählt und sein Geburts**datum** (tt.mm.jjjj) wird festgestellt
(c) Ein Passant wird zufällig ausgewählt und sein Gewicht wird festgestellt
(d) Bei der Lottoziehung werden 6 aus 49 Kugeln zufällig ausgewählt und die gezogenen Zahlen werden festgestellt.
(e) Ein Neugeborenes wird zufällig ausgewählt und das Geschlecht wird festgestellt.
(f) Ein Fußballspiel wird ausgewählt und das Ergebnis wird festgestellt.
(g) Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen, die Augenzahl wird jeweils in der Reihenfolge des Auftretens notiert.
(h) Mit einem Computer werden natürliche 4-stellige natürliche Zufallszahlen erzeugt und die Zahl wird festgestellt.
(i) Mit einem Computer werden natürliche Zufallszahlen erzeugt und es wird festgestellt ob die Zahl prim ist oder nicht.
(j) Mit einem Computer werden natürliche Zufallszahlen erzeugt und es wird festgestellt ob die Zahl durch 3 teilbar ist oder nicht.
(k) Ein Regentropfen wird beobachtet und es wird festgestellt, ob er auf eine vorgegebene Fläche auftrifft oder nicht.

**Im weiteren untersuchen wir vor allem Zufallsversuche mit endlichen Ergebnisräumen.**

**Wahrscheinlichkeit:**

Wie ist der Begriff festgelegt? Ein Problem! Intuitiv wissen wir, was damit gemeint ist. Beim Wurf eines idealen Würfels ist die Wahrscheinlichkeit für *jedes* Ergebnis, z. B. für die Zahl 1, *gleich groß*, nämlich gleich 1/6: In *einem* von 6 möglichen Fällen kann man im Mittel mit der 1 rechnen. Man sagt:

P(1) = 1/6
P(2) = 1/6
.
.
.
P(6) = 1/6.

Wenn bei einem Zufallsversuch mit endlich vielen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis gleich groß ist, spricht man von einem **Laplace-Versuch**.

In vielen Fällen ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis jedoch nicht theoretisch verhersagbar. Dann behilft man sich experimentell, indem man das Zufallsexperiment „sehr oft“ durchführt.

**Die beobachtete relative Häufigkeit $h_n(e)$ mit der ein Ergebnis e bei n-maliger Durchführung eines Zufallsexperiments eintritt, nähert sich mit wachsendem n einem stabilen Wert P(e), der Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis.**

$$P(e) \approx h_n(e) \quad \text{für genügend große n}$$

**Gesetz der großen Zahl:**

$$\lim_{n\to\infty} h_n(e) = P(e)$$

Definition:

Ist $S=\{e_1;e_2;\ldots;e_n\}$ die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments, so heißt jede Funktion $P: e_i \rightarrow P(e_i)$ eine **Wahrscheinlichkeitsfunktion** bzw. eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist eine reelle Zahl
  $P(e_i) \in \mathbb{R}$ für alle i
- Die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses liegt zwischen 0 und 1.
  Für jedes i ist $0 \le P(e_i) \le 1$.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ist 1.
  Es gilt: $P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n)=1$

Ist die Wahrscheinlichkeit für alle Ergebnisse $e_i$ gleich, also $P(e_i)=\frac{1}{n}$ dann bezeichnet man dieses Zufallsexperiment als Laplace-Experiment.

Für jedes i heißt P($e_i$) die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses $e_i$.

**Aufgabe 3.3:** Wie groß sind bei folgenden Zufallsversuchen die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ergebnisses? Falls möglich, bestimme sie, andernfalls beschreibe, wie man sie finden könnte!

(a) Zufallsversuch: Doppelwurf mit idealen nicht unterscheidbaren Würfeln Die Reihenfolge ist unwichtig.
Ergebnis $e_1$: Sechserpasch
Ergebnis $e_1$: eine Sechs und eine Eins

(b) Zufallsversuch: Ziehen einer Karte in einem „einwandfreien“ Kartenspiel.
Ergebnis e: Herz Sieben wird gezogen.

(c) Zufallsversuch: Abgabe eines Tipps bei „6 aus 49“
Ergebnis e: „Sechs Richtige“

(d) Zufallsversuch: Werfen eines Reißnagels auf einer Tischplatte, wobei entweder K = Kopf- oder S = Seitenlage entsteht.
Ergebnis e: K.

**Aufgabe 3.4:** 8 mal nacheinander wird eine „ideale“ Münze geworfen. Es werden der Reihe nach die Achttupel der Einzelergebnisse notiert, z.B. (K; K; W; K; W; W; W; K). Alle diese Achttupel sind die Ergebnisse dieses **„mehrstufigen“ Zufallsversuchs**.

(Übrigens: Der Euro, zumindest der deutsche Euro, soll nach letzten Zeitungsberichten nicht „ideal“sein, die Wahrscheinlichkeiten *beim einmaligen Werfen* für W und Z sollen nicht gleich sein, also wäre das einmalige Werfen einer deutschen Euromünze kein Laplace-Versuch!!)

(a) Wie viel Elemente hat S? D.h. wie viel Ergebnisse hat dieser 8stufige Zufallsversuch?
(b) Handelt es sich um einen Laplace-Versuch?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis e = (W; W; Z; W; Z; Z; Z; W)?
Vereinbarung: Wir schreiben künftig kurz: WWZWZZZW.

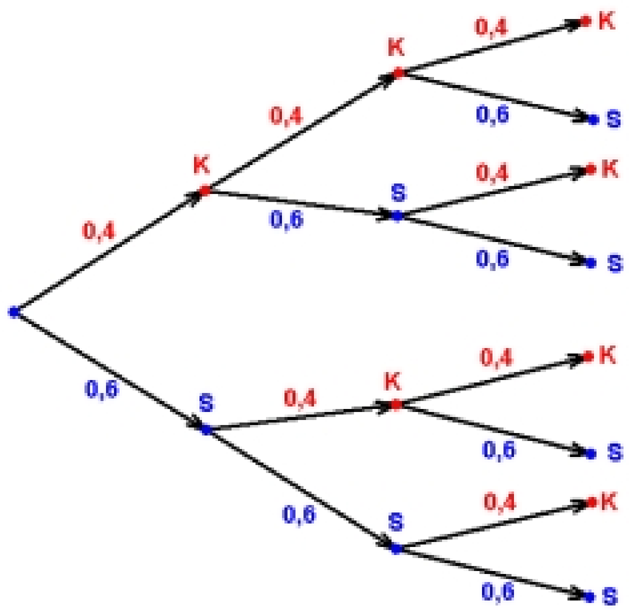
**Aufgabe 3.5:** Ein Laplace-Versuch hat n mögliche Ergebnisse. Er wird m mal nacheinander ausgeführt. ( „m-stufiger Zufallsversuch“) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis dieses m-stufigen Versuchs, d.h. für ein spezielles m-tupel?
Entwickle eine Formel!

Was bei einem *Laplace-Versuch*, der m mal nacheinander ausgeführt wird, einfach war, ist komplizierter, wenn

- ein *Nicht-Laplace*-Versuch m mal nacheinander ausgeführt wird,
- oder sogar *ganz unterschiedliche* Zufallsversuche nacheinander ausgeführt werden
  z.B. erst Münze werfen, dann Reißnagel werfen, dann Karte ziehen...
- und ganz besonders dann, wenn die Wahrscheinlichkeit auf einer bestimmten Stufe auf irgend eine mehr oder weniger komplizierte Art *von den vorausgegangenen Ergebnissen abhängt*... Uff, das war kompliziert! Kannst du mal dafür ein Beispiel finden??

**Mehrstufige Zufallsversuche** setzen sich aus mehreren einzelnen nacheinander ausgeführten Zufallsversuchen zusammen. Die Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsversuchen kann man mit Hilfe von **Baumdiagrammen** bestimmen, in denen die Ergebnisse durch „Pfade“ dargestellt werden:

Ein Beispiel soll dies zeigen:
Ein Reißnagel wird dreimal geworfen. Durch umfangreiche Versuchsreihen wurde festgestellt, wie hoch beim *einmaligen* Wurf die Wahrscheinlichkeiten für Kopf- bzw. Seitenlage sind: P(K) = 0,4; P(S) = 0,6. Im Unterschied zu Aufgabe 4 handelt es sich also um einen Nicht-Laplace-Versuch.




KKK
KKS
KSK
KSS
SKK
SKS
SSK
SSS

S={KKK, KKS, KSK, KSS, SKK, SKS, SSK, SSS}

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt z.B. das Ergebnis SKS ein?

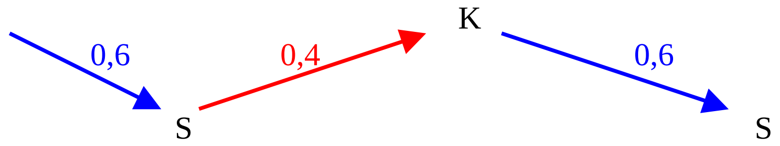
**Lösung**:

Erste Stufe: Bei häufiger Versuchsdurchführung wird in etwa 60% aller Fälle S auftreten.

Zweite Stufe: In ca 40% aller Würfe wird K auftreten. Also in etwa 40% von 60% (d.h. $\frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{24}{100} = 0,24 = 24\%$ ) aller Fälle werden nacheinander S und K auftreten.

Dritte Stufe: Schließlich werden in 60% von 24% (d.h. $\frac{24}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{144}{1000} = 0,144 = 14,4\%$ ) aller Fälle nacheinander die Lagen S, K, S auftreten.

Also:




$$P(SKS) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,144$$

Entsprechende Überlegungen kann man auch machen, wenn ganz unterschiedliche Zufallsversuche nacheinander ausgeführt werden! (Auch in dem 3. komplizierten Fall!)
Wir schließen:

**Pfadmultiplikationsregel:** Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

**Aufgabe 3.6:** Der Reißnagel mit P(K) = 0,4 und P(S) = 0,6 wird viermal nacheinander geworfen.

(a) Welche Ergebnisse sind denkbar?
(b) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse?

**Aufgabe 3.7:** Eine Urne enthält 3 weiße und 4 rote Kugeln, die sich weiter nicht unterscheiden. Wenn man *einmal* eine Kugel zieht, sind also nur zwei Ergebnisse möglich: w und r.

(a) Man entnimmt eine Kugel zufällig, notiert die Farbe, mischt durch und zieht nochmals eine Kugel, ohne die erste zurückzulegen.
Zeichne ein Baumdiagramm und notiere die Wahrscheinlichkeiten an den betreffenden Zweigen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse mit der Pfadregel!
(b) Nachdem zwei Kugeln gezogen sind, wird, ohne die Kugeln zurückzulegen, eine dritte gezogen. Gleiche Fragen wie unter (a).