

Bernoulli-Versuche:

Daniel
Bernoulli
1700-1782
Schweizer
Mathematiker

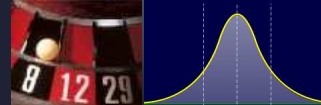


Ein Zufallsversuch mit nur zwei möglichen Ergebnissen heißt
einstufiger Bernoulli-Versuch.

Wir nennen künftig die Ergebnisse meistens E ($\hat{=}$ Erfolg)
und \bar{E} ($\hat{=}$ Misserfolg)

Beispiele: Münzwurf $S = \{W; Z\}$ $E=W$ oder umgekehrt

Würfeln /
Augenzahl
prim ? $S = \{\text{prim}; \overline{\text{prim}}\}$ $E=\text{prim}$



Bernoulli-Versuche:

Daniel Bernoulli
1700-1782
Schweizer
Mathematiker



Ein n-stufiger Bernoulli-Versuch ist die n-malige Durchführung eines einstufigen Bernoulli-Versuchs.

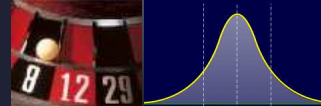
Beispiel: 3-maliger Münzwurf

$$S = \{(w | w | w); \dots (z | z | z)\} \quad \# S = 8$$

$E \hat{=} W$

3 mal Erfolg

0 mal Erfolg



Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$ (Erfolg: Kugel nach rechts)

Galton Brett

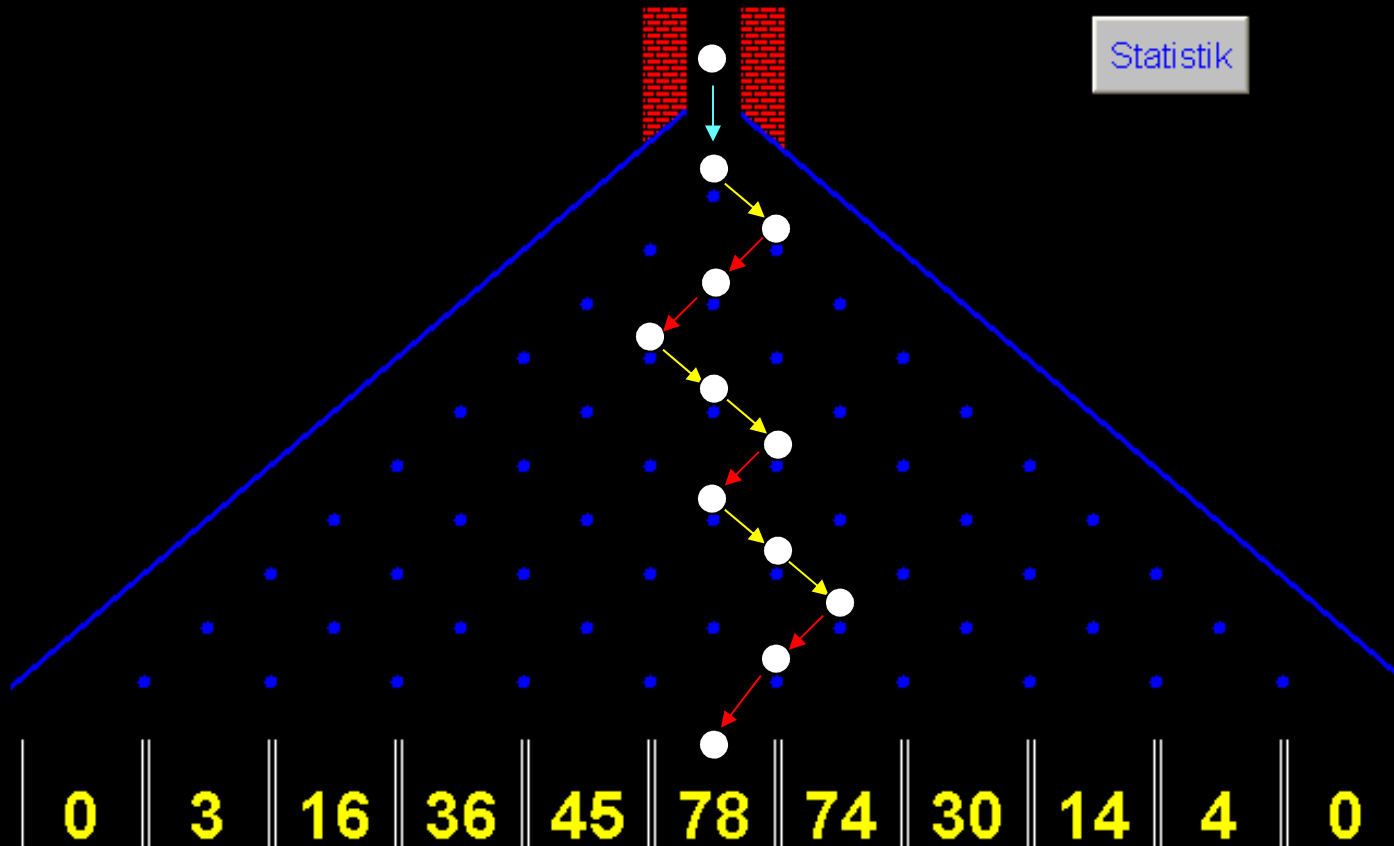
Optionen

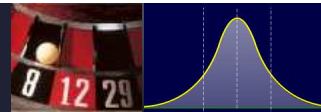
Hauptmenü

Anzahl der Kugeln:	300	?
Wahrscheinlichkeit:	50	?
Entscheidungen:	10	?

Statistik

START





Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$

Galton Brett

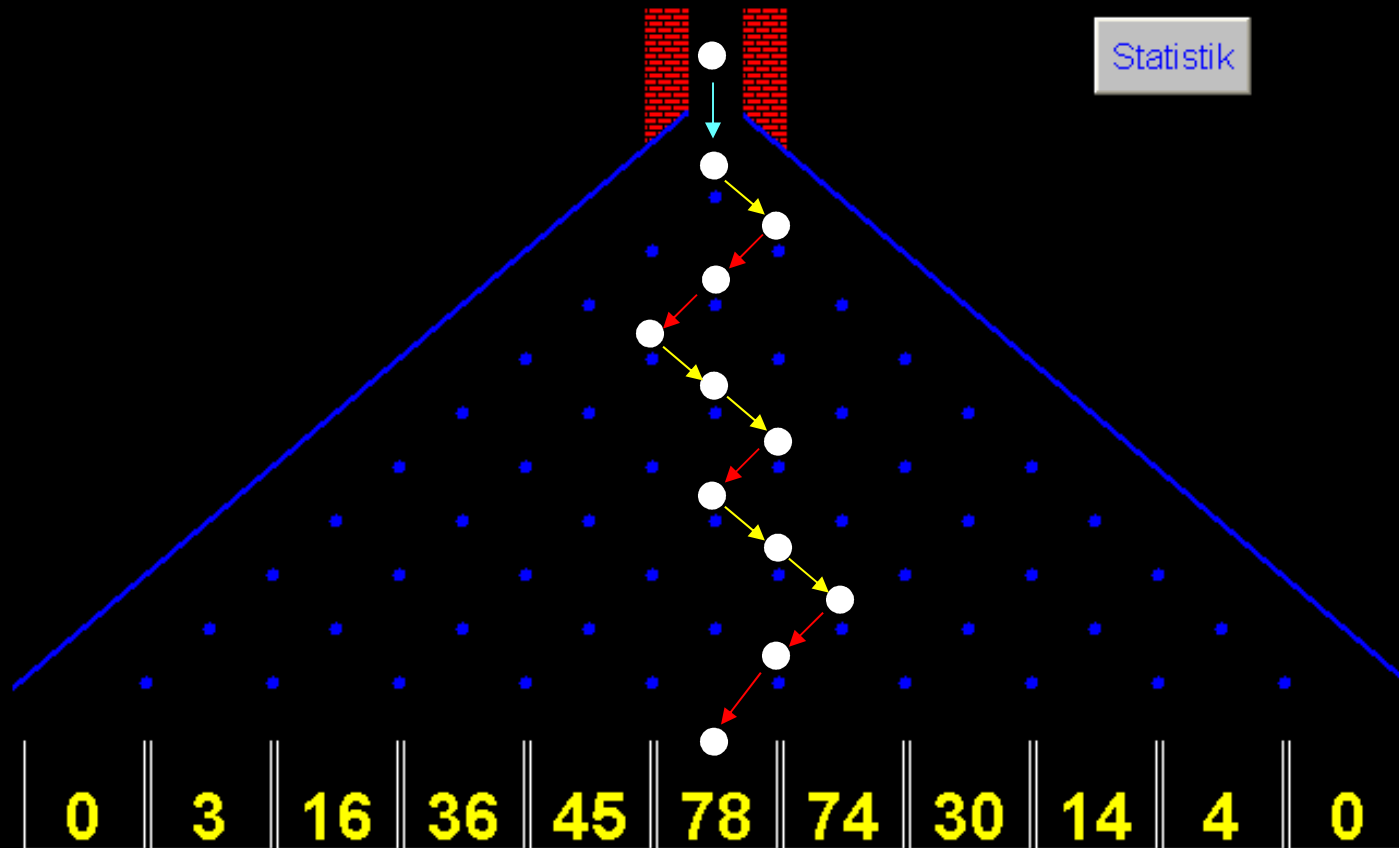
Optionen Hauptmenü

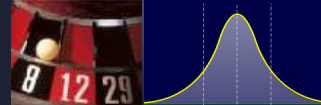
Anzahl der Kugeln: 300 ?

Wahrscheinlichkeit: 50 ?

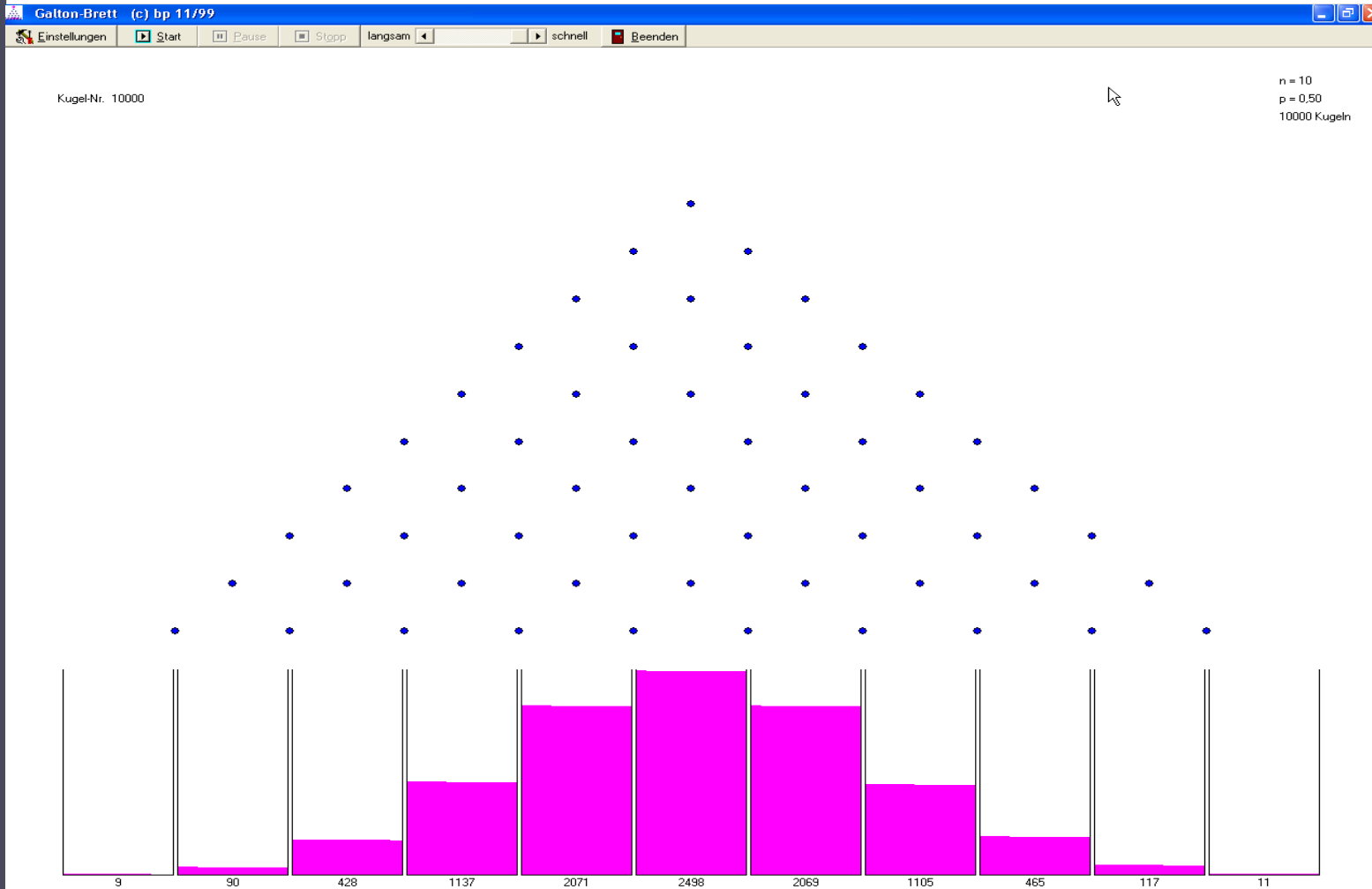
Entscheidungen: 10 ?

Statistik START





10-stufiger Bernoulli-Versuch Erfolg: Kugel nach rechts $p=0,5$

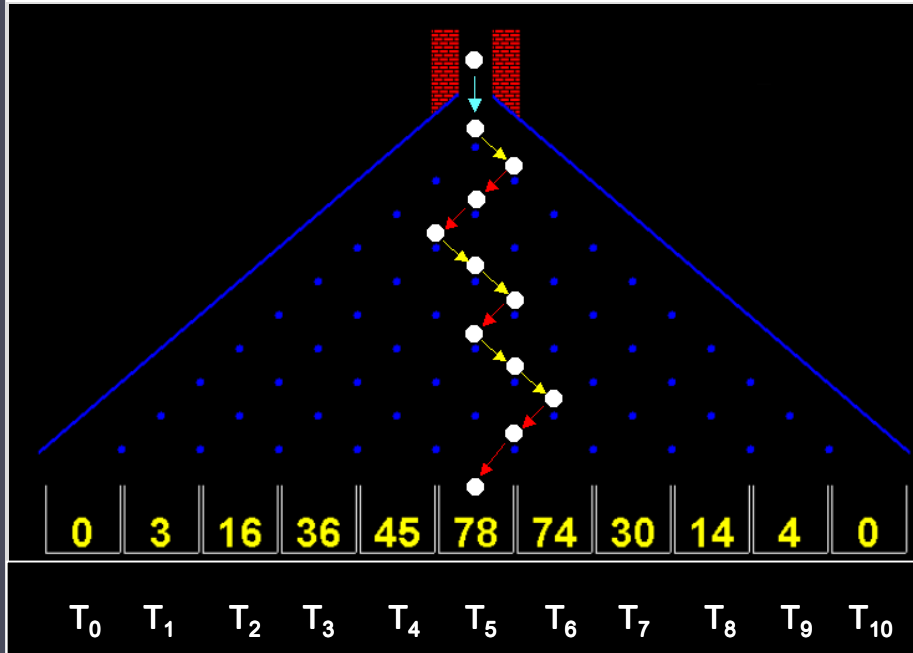


n=10
p=0,5

Ergebnis nach 10000 Durchführungen (10000 Kugeln)

Galton.exe

Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$ („rechts“)

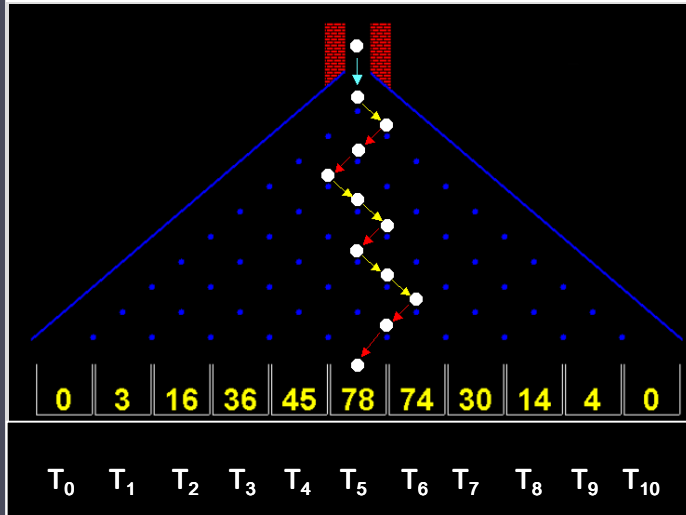


Dieses 10 stufige Experiment wird insgesamt $n=300$ mal durchgeführt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel den eingezeichneten Weg einschlägt ?

$$P(\text{rlrrlrrll}) = 0,5^{10}$$

Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$ („rechts“)



Dieses 10 stufige Experiment wird insgesamt $n=300$ mal durchgeführt.

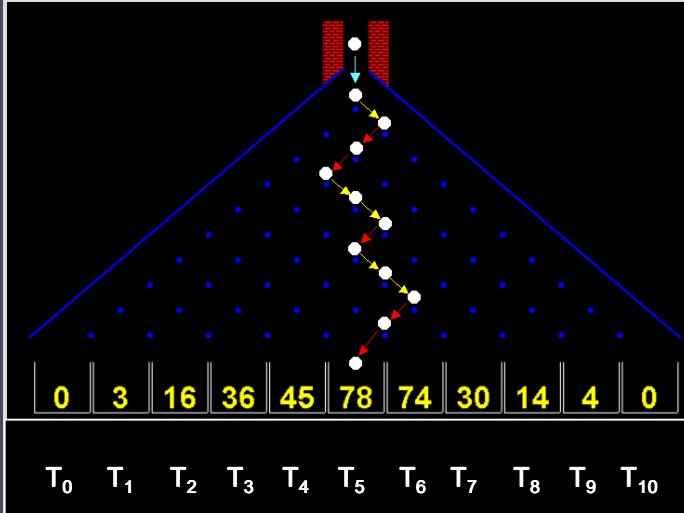
$$P(\text{rllrrllrrll}) = 0,5^{10}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in dem Topf T_5 landet ?

Zu dem Topf führen alle Pfade bei denen 5 mal r und 5 mal l vorkommen.

Da es $\binom{10}{5}$ solcher Pfade gibt: $P(T_5) = \binom{10}{5} \cdot 0,5^{10} = 0,246 = 24,6\%$

Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$ („rechts“)



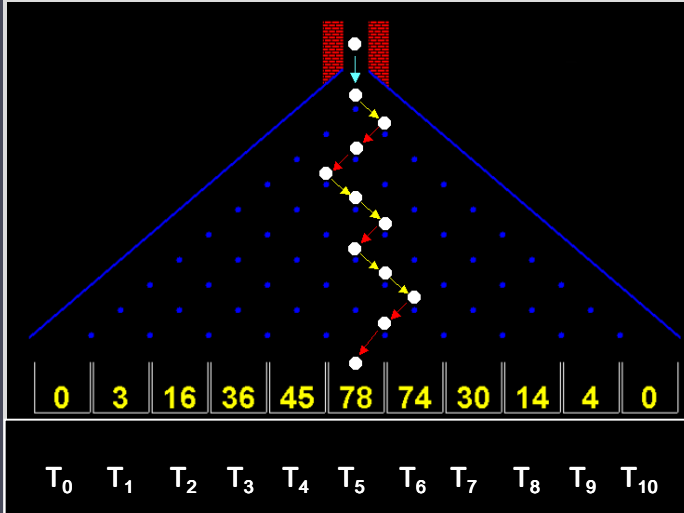
Dieses 10 stufige Experiment wird insgesamt $n=300$ mal durchgeführt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in dem Topf T_k $0 \leq k \leq 10$ landet ?

Zu dem Topf führen alle Pfade bei denen k mal r und $(10-k)$ mal l vorkommen.

Da es $\binom{10}{k}$ solcher Pfade gibt: $P(T_k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10} = 0,246$

Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$ („rechts“)



Dieses 10 stufige Experiment wird insgesamt $n=300$ mal durchgeführt.

$$P(T_k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10} = 0,246$$

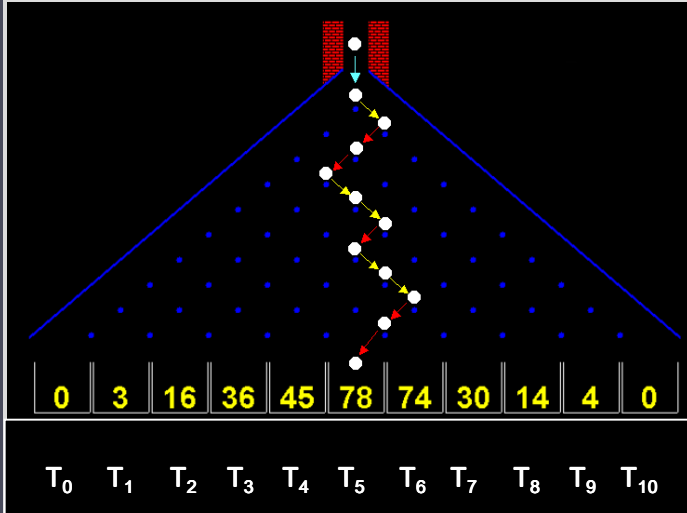
Für das Ereignis „ k -mal Erfolg“ schreiben wir in Zukunft $X=k$

Die Zufallsvariable X bezeichnet dabei die Anzahl der Erfolge

bei einem n -Stufigen Bernoulli-Experiment.

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10}$$

Bernoulli-Versuch $n=10$ $p=0,5$ („rechts“)

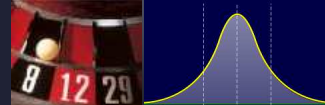


Dieses 10 stufige Experiment wird insgesamt $n=300$ mal durchgeführt.

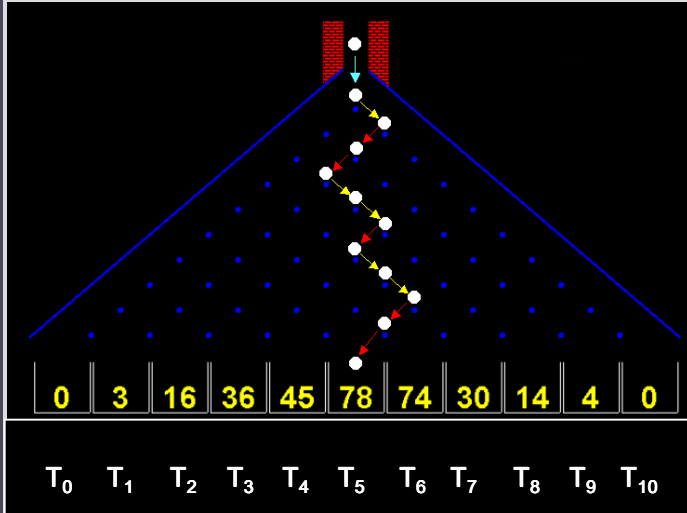
$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10}$$

Rechnet man alle Wahrscheinlichkeiten aus, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieses Versuchs.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001



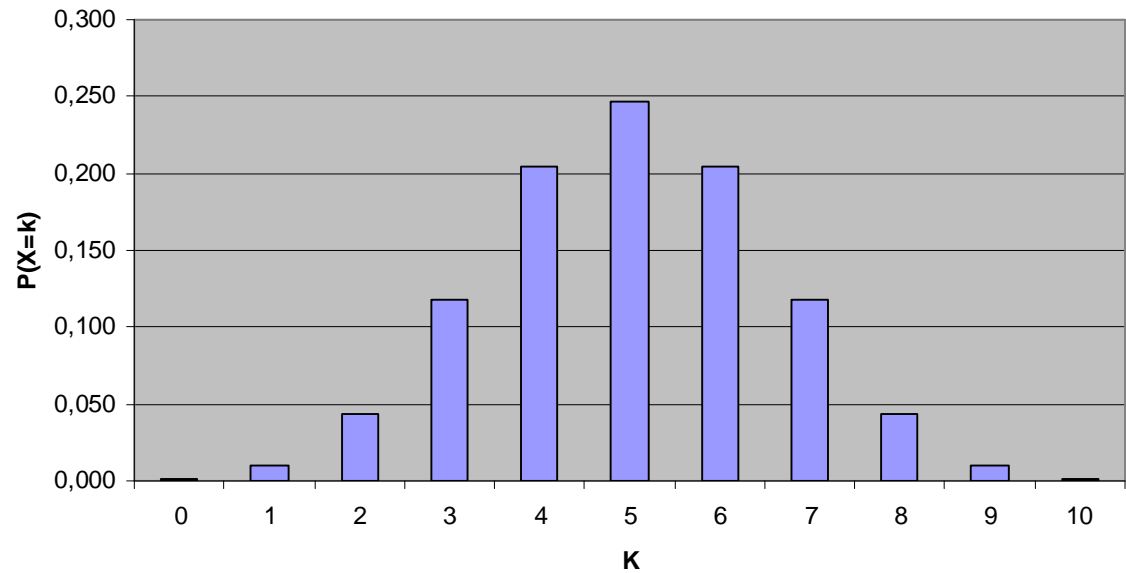
Bernoulli-Versuch n=10 p=0,5 („rechts“)

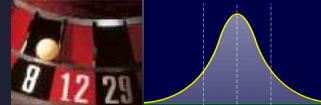


$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

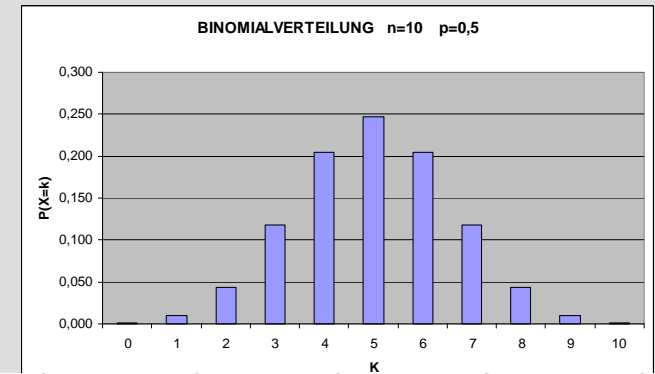
BINOMIALVERTEILUNG n=10 p=0,5





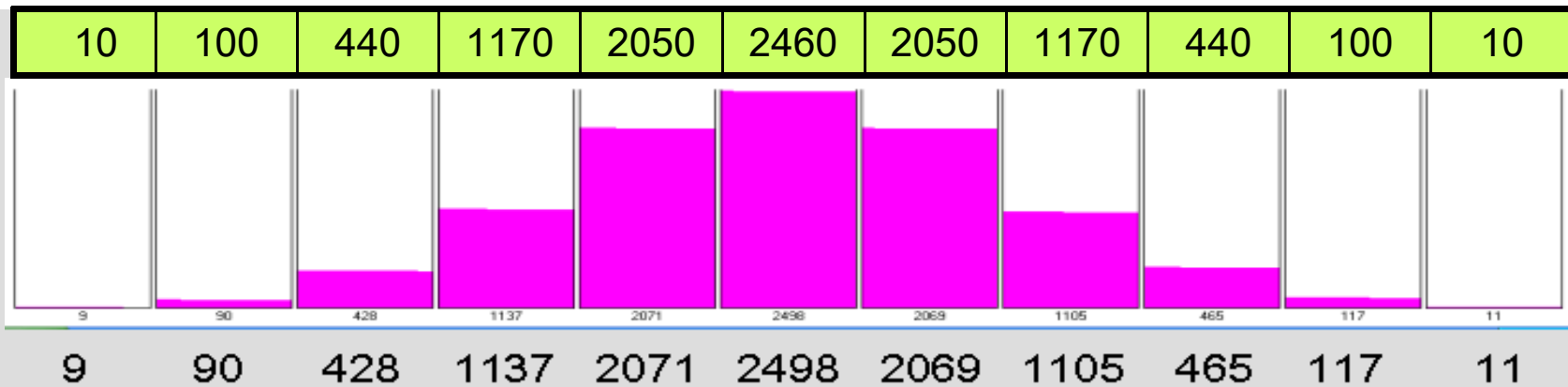
Bernoulli-Versuch n=10 p=0,5 („rechts“)

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10}$$

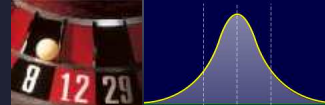


k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

Wie viele Kugeln erwarten wir damit in den einzelnen Töpfen?



Simulation mit Galton.exe

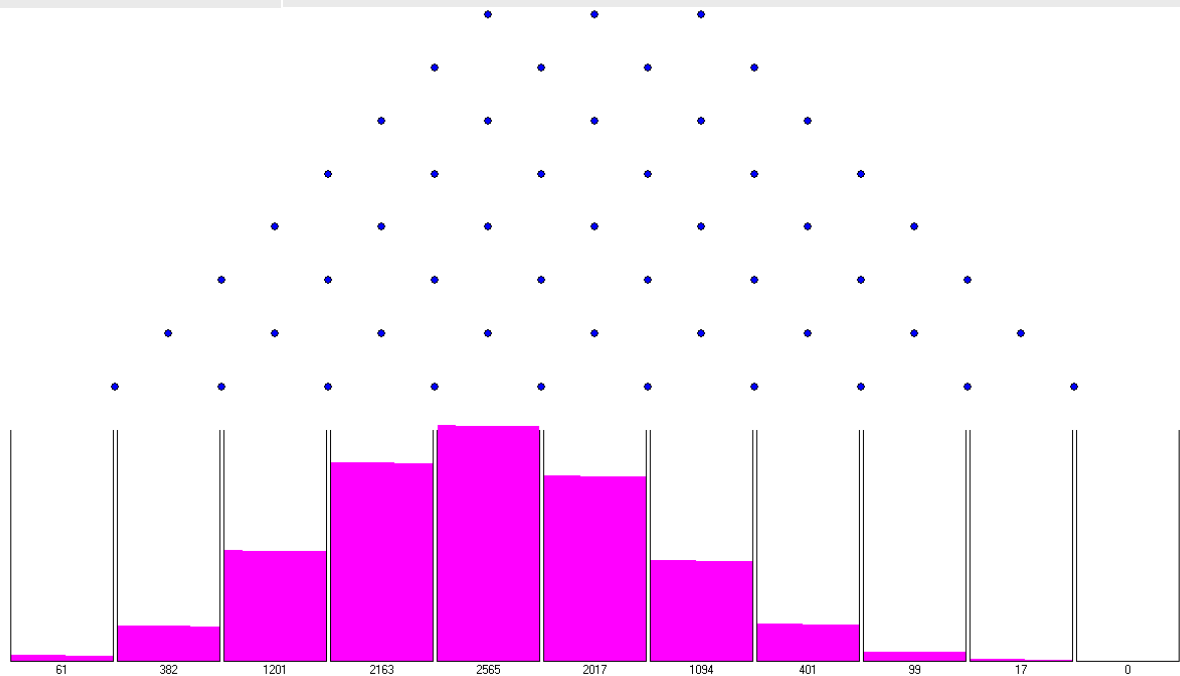


10 Stufiges Bernoulli-Experiment $p=0,4$ $q=(1-p)=0,6$

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^{10} \text{ falls } p = 0,5 \text{ und } q = (1-p) = 0,5$$

Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung wenn p und q unterschiedlich sind?

$$P(X=k) = \binom{10}{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{10-k}$$



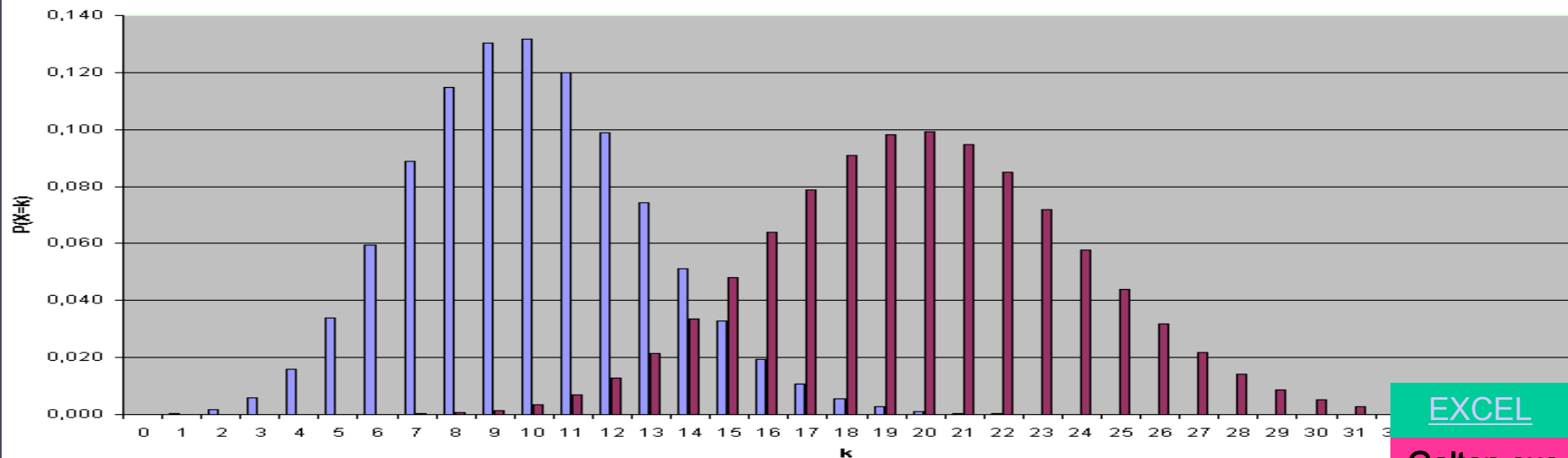
EXCEL
Galton.exe

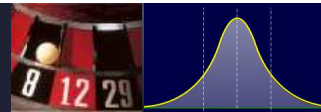
n Stufiges Bernoulli-Experiment Erfolgswahrscheinlichkeit p

Bei einem n stufigen Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $q=(1-p)$ hat man für das Ereignis $X=k$ („k Erfolge“) die Wahrscheinlichkeitsverteilung

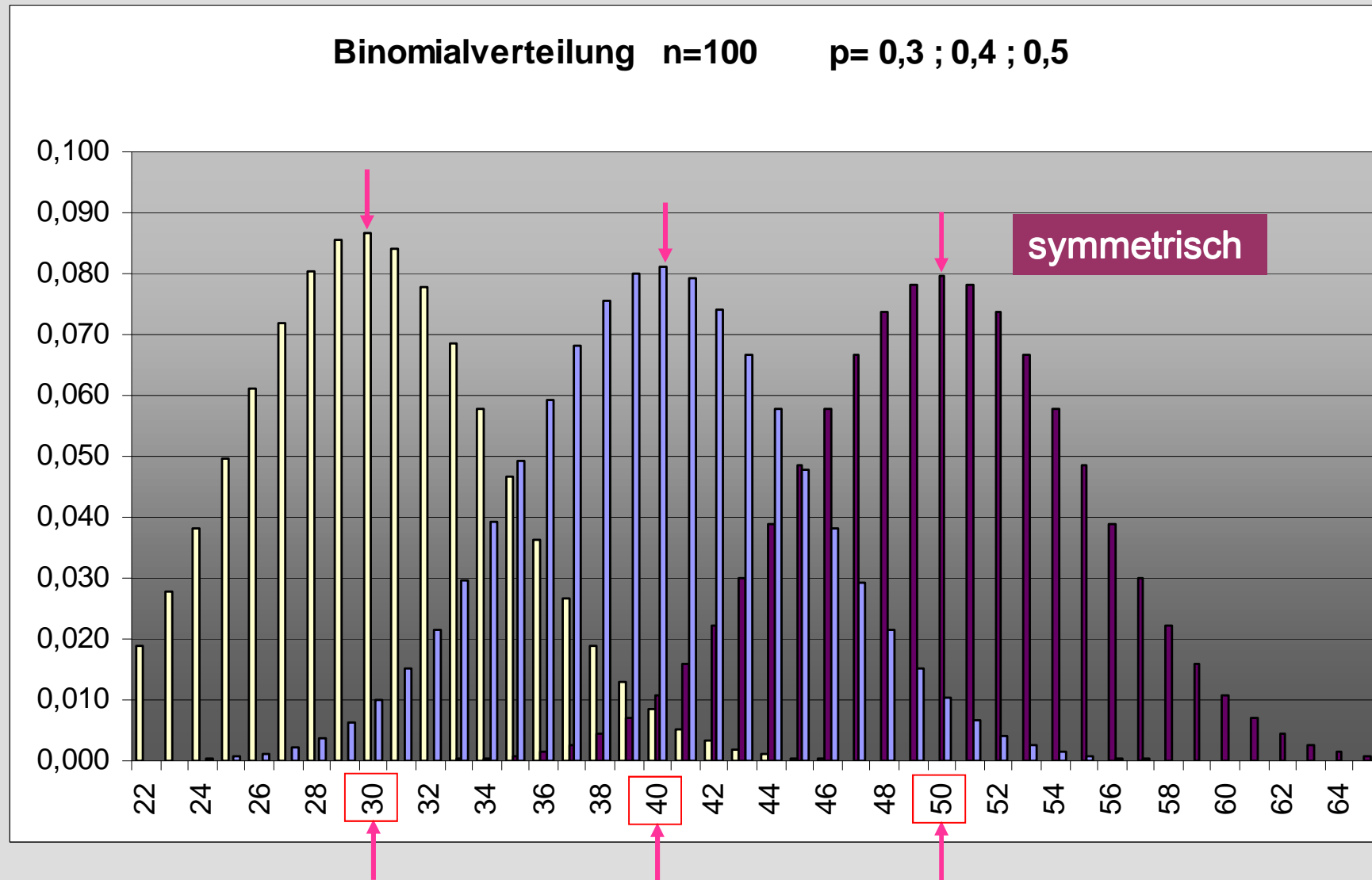
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialverteilung $n=100$ $p=0,1$ und $p=0,2$

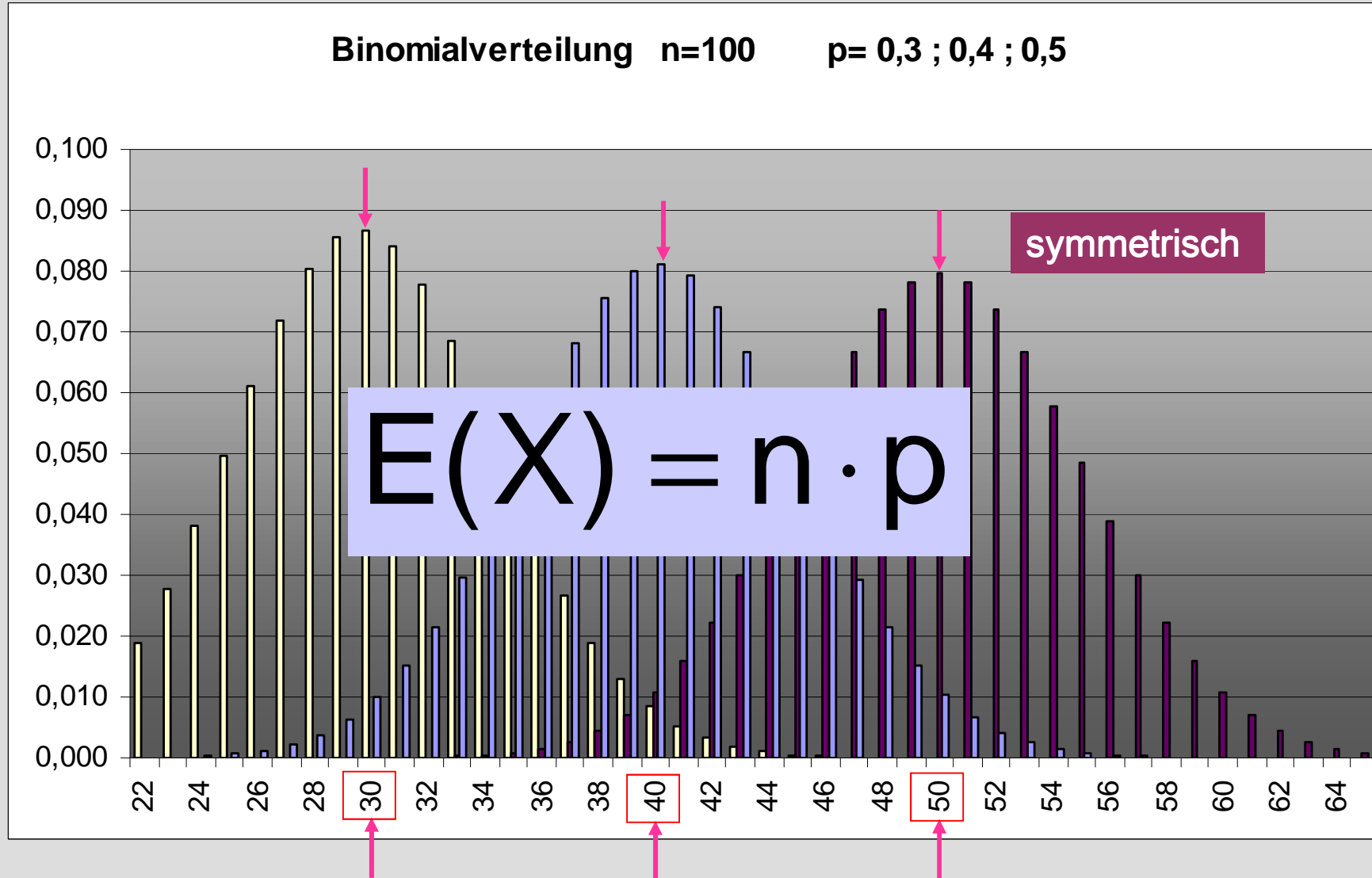


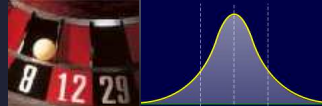


Binomialverteilungen bei gleichem n



Der Erwartungswert μ



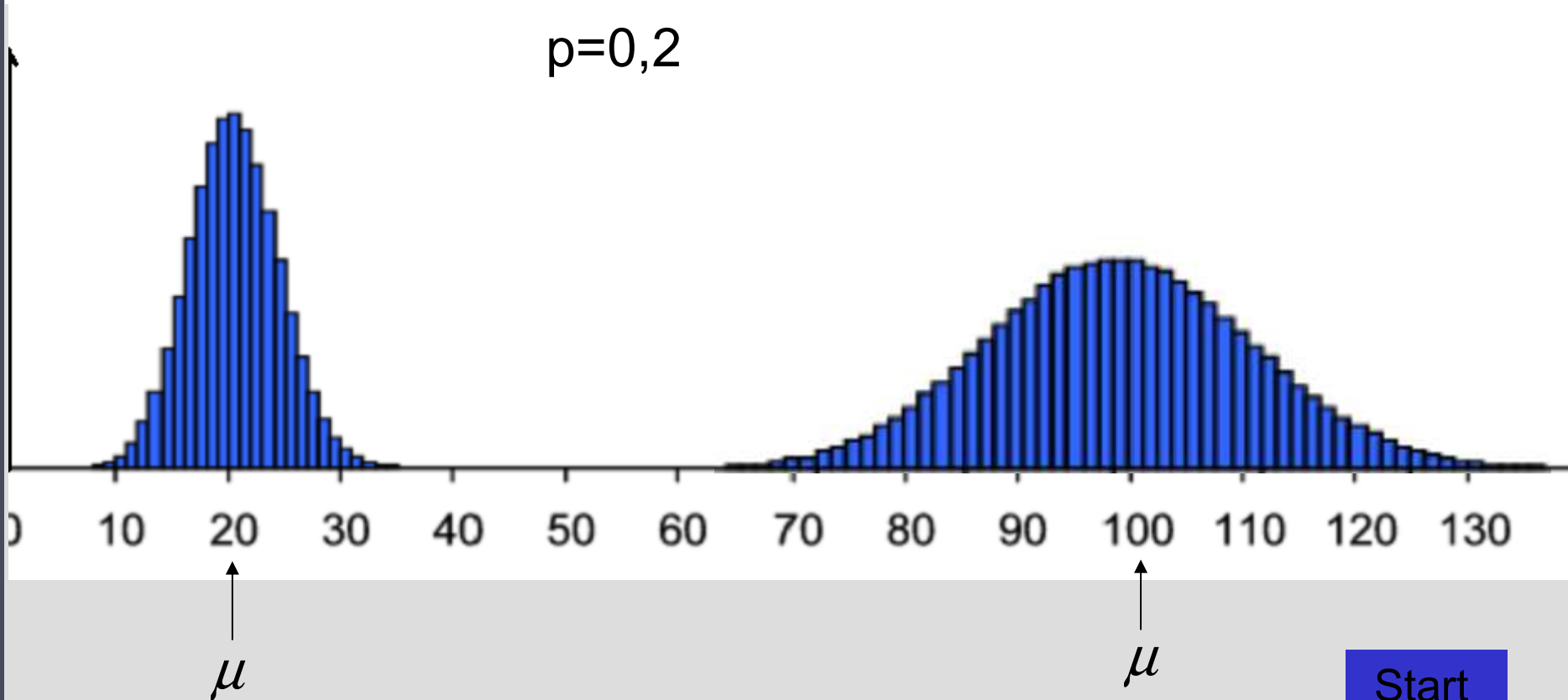


Binomialverteilungen bei gleichem p (n variabel)

$n=100$

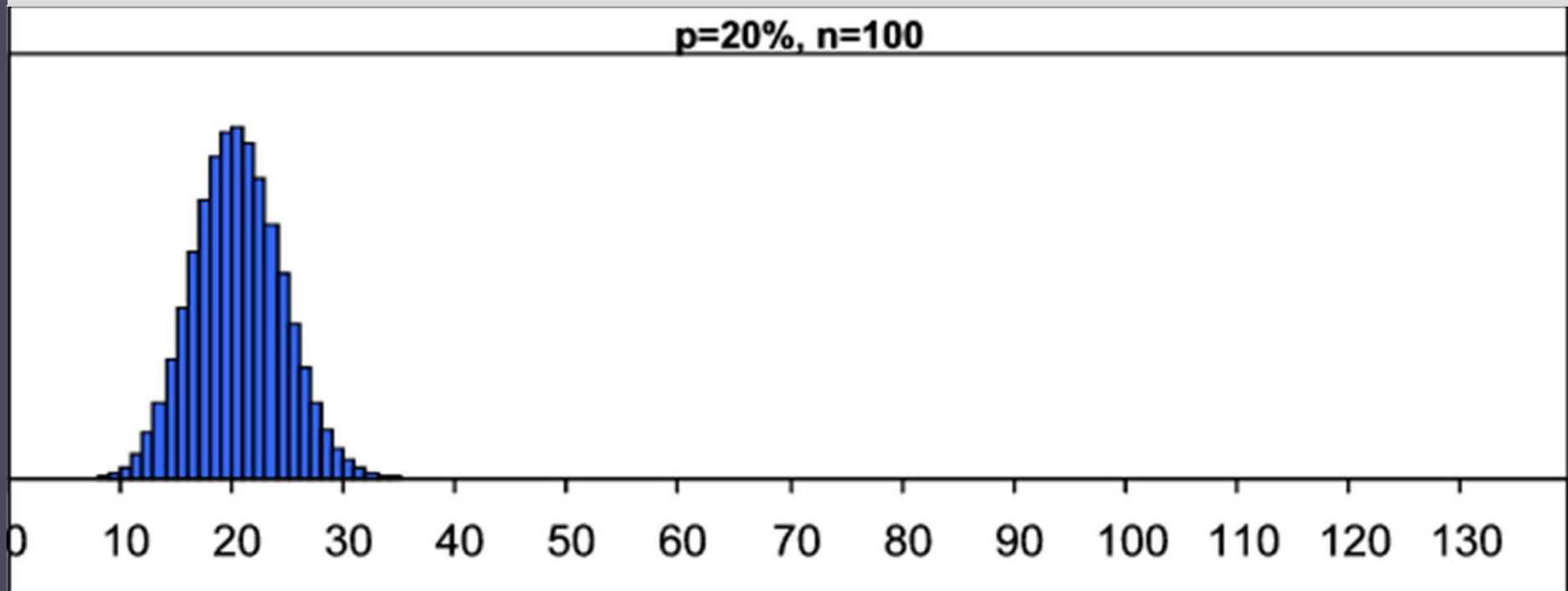
$n=500$

$p=0,2$





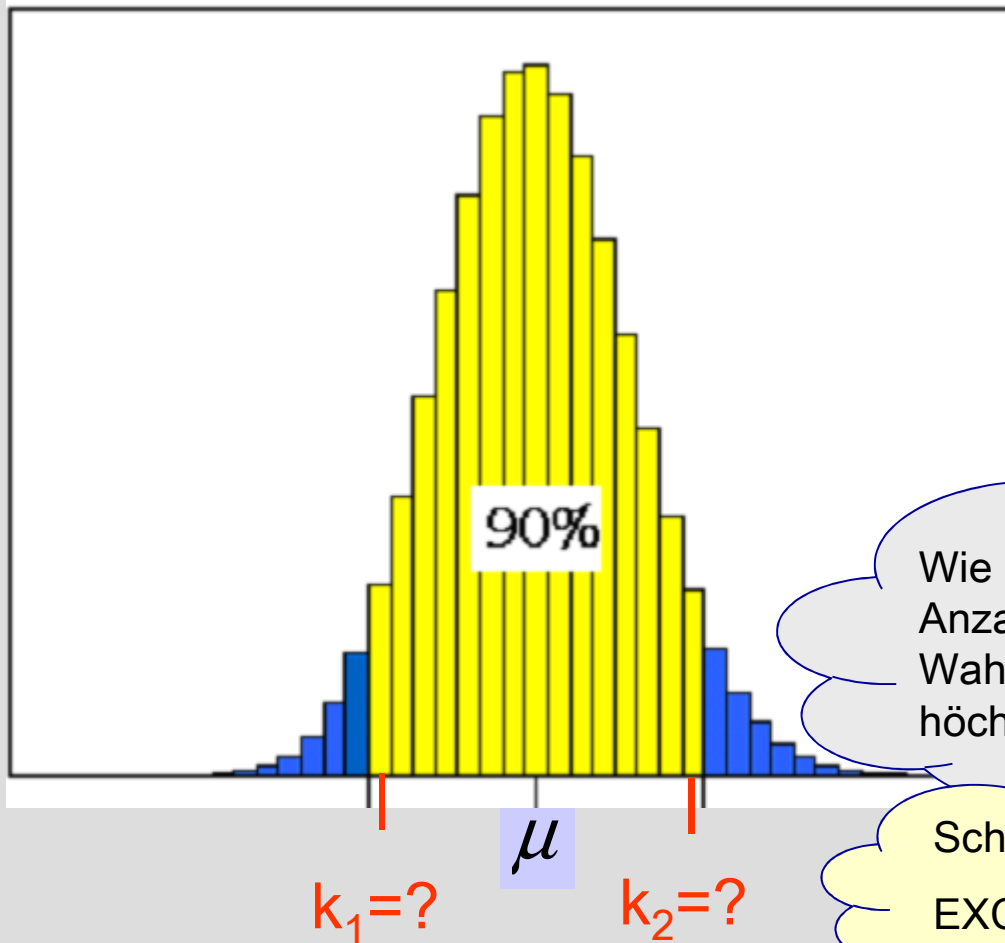
Binomialverteilungen bei gleichem n (p variabel)



Außer dem Erwartungswert $E(X)$ benötigen wir noch ein Maß für die Breite der Verteilung :

$$\sigma(x) = n \cdot p \cdot q \quad q = 1 - p$$

Faustregel 1 für 90%-Umgebungen



$$E(X) = \mu = n \cdot p$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

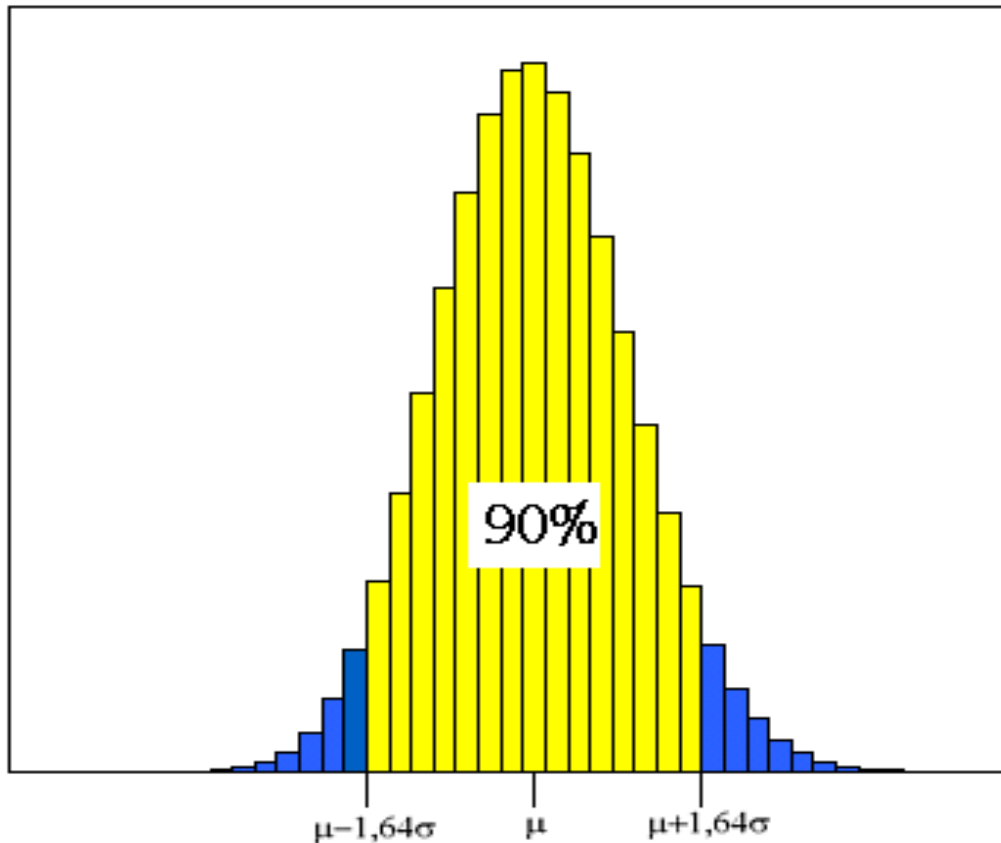
Wie muss ich k_1 und k_2 wählen, damit die Anzahl der Erfolge mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens k_1 und höchstens k_2 beträgt.

Schätzen und mit EXCEL überprüfen.

EXCEL



Faustregel 1 für 90%-Umgebungen



n-stufiges
Bernoulli-Experiment
mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem
Erwartungswert

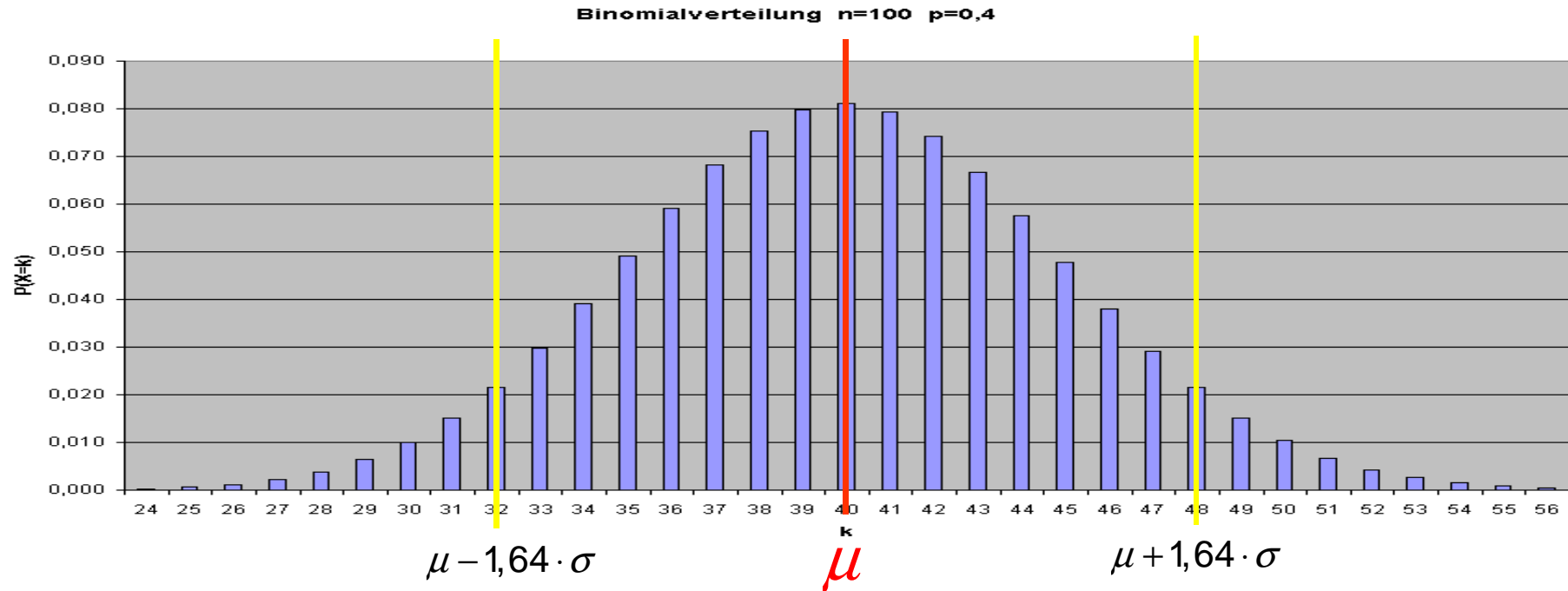
$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

und der
Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% liegt die Anzahl der Erfolge in dem Intervall $[\mu - 1,64\sigma; \mu + 1,64\sigma]_{\mathbb{N}}$

Beispiel für die Faustregel 1



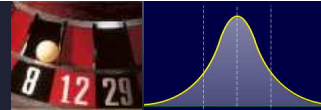
$$n = 100 \quad p = 0,4 \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 40$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0,6} \approx 4,9$$

$$1,64 \cdot \sigma \approx 8,03$$

$$U_{90\%} = [32; 48]$$

In 90% aller Fälle liegt das Ergebnis dieses Zufallsversuchs im Bereich von 32 bis 48 Erfolgen!



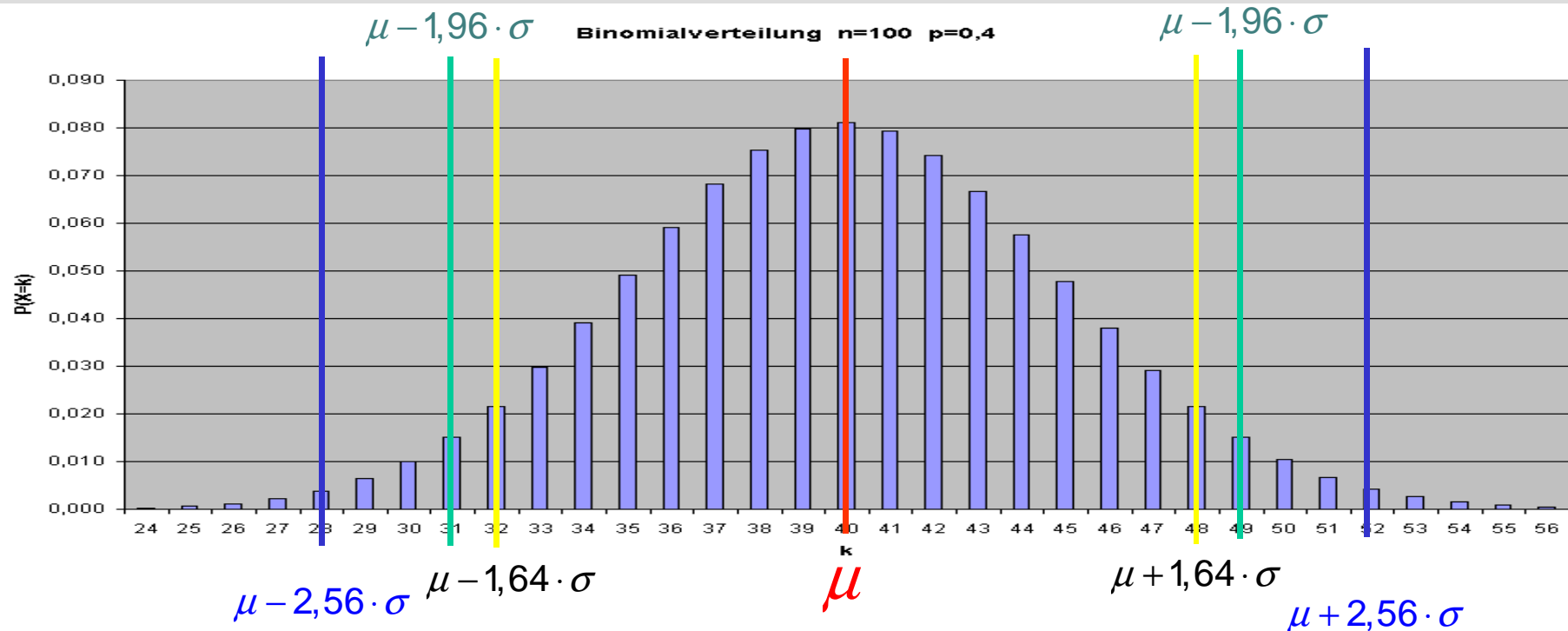
Faustregeln

Die folgenden **Faustregeln** für Binomialverteilungen gelten umso genauer, je größer n ist, insbesondere falls die **Laplace-Bedingung** $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$ erfüllt ist.

Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
σ	68%	90%	$1,64 \cdot \sigma$
2σ	95,5%	95%	$1,96 \cdot \sigma$
3σ	99,7%	99%	$2,56 \cdot \sigma$



Beispiel für die Faustregeln



$$n = 100 \quad p = 0,4 \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 40$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0,6} \approx 4,9$$

$$1,64 \cdot \sigma \approx 8,03 \quad 1,96 \cdot \sigma \approx 9,6 \quad 2,56 \cdot \sigma \approx 12,54$$

$$U_{90\%} = [32; 48] \quad U_{95\%} = [31; 49] \quad U_{99\%} = [28; 52]$$