Reelle Funktionen

Definition: Unter einer reellen Funktion versteht man eine Zuordnung, die jeder reellen Zahl aus einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl zuordnet.

Schreibweise:

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

f	ist der Name der Funktion
D_f	ist der Definitionsbereich der Funktion f. Er enthält alle Zahlen, auf die die Zuordnung angewendet werden soll Unter dem maximalen Definitionsbereich versteht man die größtmögliche Menge, für die die Funktion definiert ist.
f(x)	bezeichnet den Funktionswert von x, d.h. die reelle Zahl, die dem Wert x durch die Funktion f zugeordnet wird.
W_f	bezeichnet die Wertemenge der Funktion f . Das sind alle reellen Zahlen, die als Funktionswert der Funktion f auftreten.
f(x)=…..	ist die Funktionsgleichung, mit der eine ganz konkrete Funktion festgelegt wird.
G_f	bezeichnet den Graphen von f. Die Menge besteht aus allen Punkten (x | f(x)) mit $x \in D_f$. Durch einzeichnen dieser Punkte in ein Koordinatensystem erhält man eine anschauliche Vorstellung vom Verlauf der Funktion.

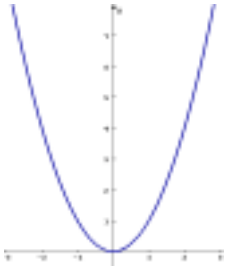
Da die vollständige Angabe der Funktion sehr umständlich ist, verwendet unser Buch folgende Abkürzungen:

$$f: x \to f(x)$$

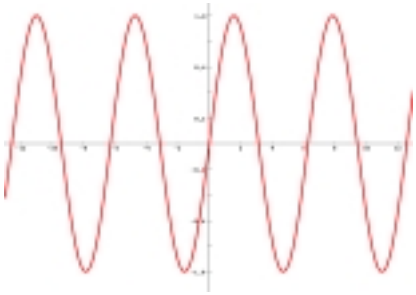
oder ganz kurz f(x)=……

Fehlt die Angabe des Definitionsbereichs, dann ist immer der maximale Definitionsbereich gemeint !

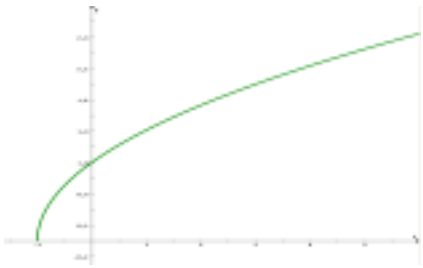
Beispiel 1: $f(x)=x^2$

Vollständige Schreibweise	$f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R}$ $x \to x^2$
Name der Funktion	f
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$ maximal
z.B. Funktionswert von 7	f(7)=49
Wertemenge der Funktion f	$W_f = \mathbb{R}_0^+$
Funktionsgleichung	$f(x)=x^2$
Graph von f	

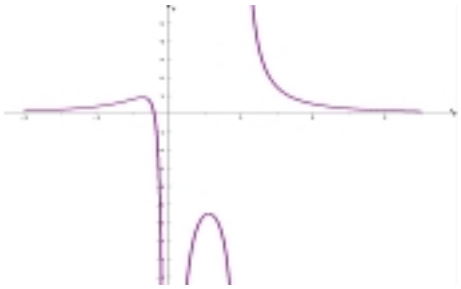
Beispiel 2: $g(x)=\sin(x)$ vorsicht : x-Werte im Bogenmaß !

Vollständige Schreibweise	$g: D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R}$ $x \to \sin(x)$
Name der Funktion	g
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$ maximal
z.B. Funktionswert von $\frac{\pi}{2}$	$g(\frac{\pi}{2})=1$
Wertemenge der Funktion f	$W_f = [-1;1]$
Funktionsgleichung	g(x)=sin(x)
Graph von f	

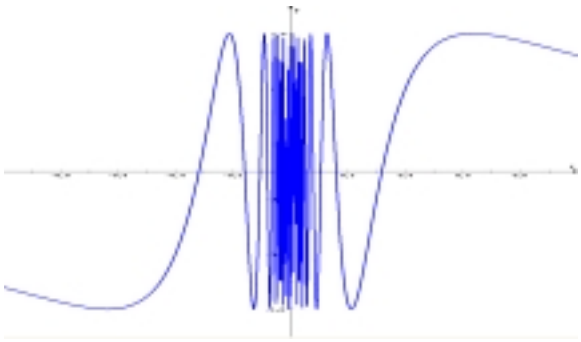
Beispiel 3: $h(x)=\sqrt{x+1}$

Vollständige Schreibweise	$h:\ D \to \mathbb{R}$ $x \to \sqrt{x+1}$
Name der Funktion	h
Definitionsbereich	$D_h = [-1;\infty[$ maximal
z.B. Funktionswert von 3	h(2)=2
Wertemenge der Funktion f	$W_f = \mathbb{R}_0^+$
Funktionsgleichung	$h(x)=\sqrt{x+1}$
Graph von f	

Beispiel 4: $r(x)=\frac{x+0,2}{x^3-x^2}$

Vollständige Schreibweise	$r:\ D \to \mathbb{R}$ $x \to \frac{x+0,2}{x^3-x^2}$
Name der Funktion	r
Definitionsbereich	$D_r = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ maximal
z.B. Funktionswert von 2	r(2)=0,55
Wertemenge der Funktion f	$W_f = \mathbb{R}$
Funktionsgleichung	$h(x)=\frac{x+0,2}{x^3-x^2}$
Graph von f	

Beispiel 5: $c(x)=\sin\frac{1}{x}$ Vorsicht : x-Werte im Bogenmaß !

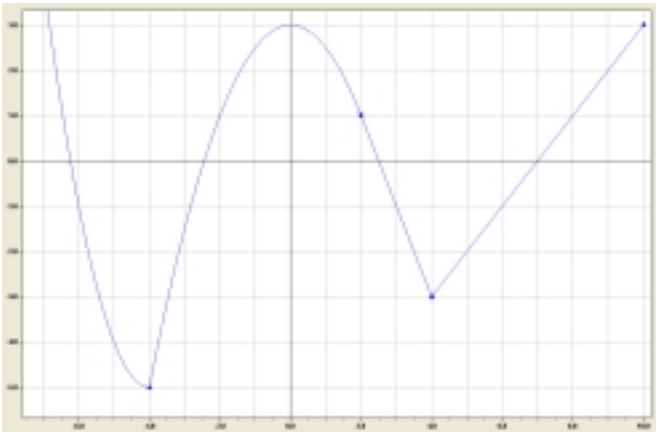
Vollständige Schreibweise	$c: D \to \mathbb{R}$ mit $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x \to \sin(\frac{1}{x})$
Name der Funktion	c
Definitionsbereich	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ maximal
z.B. Funktionswert von $\frac{1}{\pi}$	$c(\frac{1}{\pi})=0$
Wertemenge der Funktion f	$W_f=[-1;1]$
Funktionsgleichung	$c(x)=\sin(\frac{1}{x})$
Graph von f	

Besonderheit: In jeder noch so kleinen Umgebung von 0 gibt es unendlich viele Nullstellen von c !

Beispiel 6:

Abschnittsweise definierte Funktionen

$$k(x)=\begin{cases}(x+4)^2-5 & \text{für} \quad x\in[-10;-4[\\ -0{,}5x^2+3 & \text{für} \quad x\in[-4;+2[\\ -2x+5 & \text{für} \quad x\in[2;4[\\ x-7 & \text{für} \quad x\in[4;10]\end{cases}$$

Vollständige Schreibweise	$k:\ D\to\mathbb{R}$ mit $D=[-10;10]$ $x\to k(x)=\begin{cases}(x+4)^2-5 & \text{für} \quad x\in[-10;-4[\\ -0{,}5x^2+3 & \text{für} \quad x\in[-4;+2[\\ -2x+5 & \text{für} \quad x\in[2;4[\\ x-7 & \text{für} \quad x\in[4;10]\end{cases}$
Name der Funktion	k
Definitionsbereich	$D_k=[-10;10]$
z.B. Funktionswert von -4	$k(-4)=-5$
Wertemenge der Funktion f	$W_f=[-5;191]$
Funktionsgleichung	k(x)=… s.o.
Graph von f	

Frage : Ist f an der Stelle x=2 differenzierbar ?