

# Primfaktorzerlegung von Zahlen

**Jede Zahl, die selbst keine Primzahl ist, lässt sich als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben !**

Dazu sollst du die Primzahlen zwischen 2 und 101 auswendig kennen :

2

3    5    7    11    13    17    19    23    29    31  
37   41   43   47   53   59   61   67   71   73  
79   83   89   97   101

Beispiel1: Schreibe die Zahl 100 als Produkt mit lauter Primzahlen.

1. Schritt Startzerlegung  $100 = 10 \cdot 10$

10 ist keine Primzahl     $10 = 2 \cdot 5$   
also weiter zerlegen :

2. Schritt     $100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

alle Faktoren sind Primzahlen  
also bist du fertig !

**Ergebnis:**     $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Beispiel2: Schreibe die Zahl 178 als Produkt mit lauter Primzahlen.

1. Schritt Startzerlegung  $178 = 2 \cdot 89$   
alle Faktoren sind Primzahlen  
also bist du fertig !

**Ergebnis:**  $178 = 2 \cdot 89$

$$178 = 2 \cdot 89$$

Beispiel3: Schreibe die Zahl 2500 als Produkt mit lauter Primzahlen.

1. Schritt Startzerlegung  $2500 = 25 \cdot 100$   
 $25$  ist keine Primzahl und  $100$  ist keine  
Primzahl

also weiter zerlegen :

2. Schritt  $2500 = 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10$   
 $10$  ist keine Primzahl  
also weiter zerlegen :

3. Schritt  $2500 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$   
alle Faktoren sind Primzahlen  
also bist du fertig !

**Ergebnis:**  $2500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$$2500 = 2^2 \cdot 5^4$$

Beispiel4:

Schreibe die Zahl 17160 als Produkt mit lauter Primzahlen.

1. Schritt Startzerlegung  $17160 = 1716 \cdot 10$

Primzahl

1716 ist keine Primzahl und 10 ist keine

also weiter zerlegen :

2. Schritt  $17160 = 2 \cdot 858 \cdot 2 \cdot 5$

858 ist keine Primzahl

$$858 = 2 \cdot 429$$

also weiter zerlegen :

3. Schritt  $17160 = 2 \cdot 2 \cdot 429 \cdot 2 \cdot 5$

429 ist keine Primzahl

$$429 = 3 \cdot 143$$

also weiter zerlegen :

4. Schritt  $17160 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 143 \cdot 2 \cdot 5$

143 ist keine Primzahl

$$143 = 11 \cdot 13$$

also weiter zerlegen :

5. Schritt  $17160 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5$

alle Faktoren sind Primzahlen

also bist du fertig !

**Ergebnis:**

$$17160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$$

$$17160 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$$

# Primfaktorzerlegung und Teilmenge

Mit Hilfe der Primfaktorzerlegung lassen sich sehr einfach die Teiler einer Zahl bestimmen:

Zur Erinnerung:

Eine Zahl  $t$  heißt **Teiler** einer Zahl  $z$ , wenn man die Zahl  $z$  als Produkt schreiben kann, bei dem ein Faktor gerade  $t$  ist.

$3|12$  weil  $12=3 \cdot 4$  Wegen  $12=4 \cdot 3$  ist auch  $4|12$   
Die beiden Teiler 3 und 4 nennt man auch **Partnerteiler**

Beispiel 1  $178 = 2 \cdot 89$

Du siehst hier sofort, dass 2 und 89 Partnerteiler sind. 1 und die Zahl selbst sind immer Teiler.

Damit hat man die Menge aller Teiler von 178:

$$T_{178} = \{1; 2; 89; 178\}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}
 100 &= 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5) && \text{Partnerteiler} && 1; 100 \\
 &= 2 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 5) && && 2; 50 \\
 &= (2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5) && && 4; 25 \\
 &= (2 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 5 && && 20; 5 \\
 &= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) && && 10
 \end{aligned}$$

$$T_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$$

## Beispiel 3

$$140 = 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7)$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 7)$$

$$= (2 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 7$$

$$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7)$$

1 ; 100

2 ; 50  
4 ; 25

20 ; 5

$$T_{140} = \{1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 10 ; 14 ; 20 ; 35 ; 70 ; 140 \}$$

# Der größte gemeinsame Teiler von zwei oder mehreren Zahlen

Der ggT kann unterschiedlich bestimmt werden:

1. Man schreibt die Teilmengen der beiden Zahlen auf und schaut nach, welcher der größte Teiler ist, der in beiden Mengen vorkommt

Beispiel:

$$T_{105} = \{1; 3; 5; 7; 15; 21; 35; 105\}$$

$$T_{75} = \{1; 3; 5; 15; 25; 75\}$$

$$\text{ggT}(105; 75) = 15$$

2. Den ggT kann man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung finden:

Bsp:

Bestimme den  $\text{ggT}(12, 90)$  :

Zunächst zerlegst du beide Zahlen wieder in Primfaktoren. Gleiche Faktoren stehen dabei untereinander.

Unter dem Strich tragen wir von jedem Primfaktor, der bei beiden Zahlen vorkommt, die kleinste Potenz ein und multiplizieren diese dann miteinander.

$$\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3^1 \\ 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ \hline \text{ggT}(12; 90) = 2^1 \cdot 3^1 = 6 \end{array}$$

Die gemeinsamen Primfaktoren  $2^1$  und  $3^1$  sind auch gemeinsamer Teiler beider Zahlen. Natürlich ist das immer auch die 1, doch die 1 ist, wie du schon weißt, keine Primzahl und damit auch kein Primfaktor.

Werden die gemeinsamen Primfaktoren miteinander multipliziert, so erhält man den  $\text{ggT}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Hier noch ein paar Übungen.

||

$$\begin{array}{l} 264 \quad \quad \quad = \\ 330 \quad \quad \quad = \end{array}$$

---


$$\text{ggT}(264, 33) =$$

||

$$\begin{array}{l} 54 \quad = \\ 81 \quad = \end{array}$$

---

$$\text{ggT}(54,81) =$$

Noch mehr Übungen

a)  $\text{ggT}(168,208)$

b)  $\text{ggT}(1638, 693)$

c)  $\text{ggT}(672,360)$

d)  $\text{ggT}(216,240)$

e)  $\text{ggT}(63,198)$

f)  $\text{ggT}(45,165)$

g) Die Schüler der Klassen 6 haben für einen Weihnachtsbasar 72 Nikoläuse und 108 Strohsterne gebastelt. Wie viele Kinder haben höchstens daran gearbeitet, wenn jedes gleich viele Männchen bzw. Sterne abgeliefert hat?

## Das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei oder mehreren Zahlen

Das kgV kann unterschiedlich bestimmt werden:

1. Man schreibt die Vielfachenmengen der beiden Zahlen auf und schaut nach, welches Vielfache zuerst in beiden Mengen vorkommt

Beispiel:

$$V_4 = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; \dots\}$$
$$T_6 = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; \dots\}$$
$$\text{kgV}(4; 6) = 12$$

Unter allen **gemeinsamen Vielfachen** der Zahlen 4 und 6 gibt es eine kleinste Zahl (**12**). Sie ist das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** dieser Zahlen.

2. Das kgV kann man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung finden:

Schreibe die Primfaktoren in das Schema, das du auch beim ggT benutzt hast. Gleiche Faktoren stehen dabei untereinander:

$12 = 2^2 \cdot 3^1$	<b>Unter dem Strich tragen wir von jedem Primfaktor, der bei einer oder bei beiden Zahlen vorkommt, die größte Potenz ein und multiplizieren diese dann miteinander.</b>
$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$	
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $\text{kgV}(12;90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$	

Weitere gemeinsame Vielfache

Hier noch ein paar Übungen. Rechne fertig!

385	=	5 · 7 · 11
70	=	2 · 5 · 7

-----

kgV(70,385)	=	
-------------	---	--

30	=	
50	=	
100		

-----

kgV(30,50,100)	=	
----------------	---	--

## Aufgabe 2

Der Fernfahrer Frank hat jeden 12. Tag eine Fahrt von Flensburg nach Hannover, sein Kollege Karl jeden 15. Tag.

Nach wie vielen Tagen fahren beide wieder zusammen von Flensburg nach Hannover?

## Aufgabe 3

Ein Kellner hat immer 9 Tage Dienst und dann einen Tag frei. In welchem Wochenabstand fällt der dienstfreie Tag jeweils auf einen Sonntag?