

# Primzahlgeheimnis 1

**Man weiß, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen immer mindestens eine Primzahl liegt:**

Vervollständige die Quadrate und kringe alle Primzahlen ein:

1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122
4	3	6	11	18	27	38	51	66			
9	8	7	12	19	28	39	52	67			
16	15	14	13	20	29	40	53	68			
25	24	23	22	21	30	41	54	69			
36	35	34	33	32	31	42	55	70			
49	48	47	46	45	44	43	56	71			
64	63	62	61	60	59	58	57	72			
81	80	79	78	77	76	75	74	73			

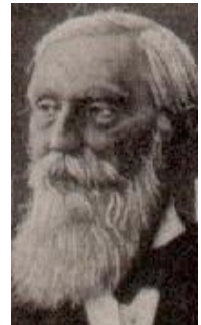
**Fülle damit die folgende Tabelle aus:**

Primzahlen		
zwischen		und
1		4
4		9
9		16
16		25
25		36
36		49
49		64
64		81
81		100
100		121
121		144

# Primzahlgeheimnis 2

Satz von Tschebyscheff (1852) :

Für jede natürliche Zahl  $n > 1$  gilt :  
 Zwischen  $n$  und  $2 \cdot n$  liegt mindestens eine Primzahl !



Tschebyscheff  
(1821-1894)

**Fülle damit die folgende Tabelle aus:**

Primzahlen		
zwischen		und
2		4
3		6
4		8
5		10
6		12
7		14
....		....
10		20
15		30
40		80
55		110

## Primzahlgeheimnis 3

**Man kann jede Zahl, die keine Primzahl ist, eindeutig als Produkt mit lauter Primzahlen (Primfaktoren) schreiben. Die Primzahlen sind also die Bausteine für alle anderen Zahlen.**

Man nennt dieses Verfahren **Primfaktorzerlegung**

Beispiel:

$1000 = 20 \cdot 50$ $= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ $= 2^3 \cdot 5^3$	$345 = 5 \cdot 69$ $= 5 \cdot 3 \cdot 23$	$704 = 64 \cdot 11$ $= 2^6 \cdot 11$
--	---	--------------------------------------

Vorsicht: Große Zahlen lassen sich nur sehr schwer in Primfaktoren zerlegen !

Aufgabe : Zerlege folgende Zahlen in Primfaktoren:

48=	120=	280=
512=	900=	2400=

## Primzahlgeheimnis 4

Satz von Euklid :

**Es gibt unendlich viele Primzahlen d.h. es gibt keine größte (letzte) Primzahl.**



Euklid  
(330-275 v.Chr.)

Der Beweis dieses Satzes ist seit der Antike weltberühmt und so einfach, dass du ihn mit etwas Konzentration auch verstehen kannst.

Ich will ihn dir an einem Beispiel klar machen :

**Nehmen wir an, die Zahl 13 sei die größte ( und damit letzte ) Primzahl.** D.h. es gibt nur die Primzahlen

2,3,5,7,11,13

Betrachten wir jetzt die Zahl

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

Das ist das Produkt aller Primzahlen bis zur Zahl 13 um 1 vergrößert.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten

**1. Fall :** 30031 ist eine Primzahl.

In diesem Fall hätten wir eine weitere Primzahl  $>13$  gefunden.

**Widerspruch zur Annahme, d.h. die Annahme ist falsch !**

**2. Fall:** 30031 ist keine Primzahl

D.h. diese Zahl muss dann noch mindestens einen Teiler außer 1 und 30031 besitzen, denn eine Zahl die keine Primzahl (und größer als 1) ist, hat mindestens 3 Teiler.

Dieser Teiler lässt sich dann eindeutig als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben. ( → **Primzahlgeheimnis 3**).

Da weder 2 noch 3 noch 5 noch 7 noch 11 und 13 Teiler von 30031 sind, muss es mindestens noch eine weitere Primzahl geben, die größer als 13 ist und gleichzeitig Teiler von 30031 ist.

**Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass 13 die größte Primzahl ist.**

D.h. **in jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch** zur Annahme, dass 13 die letzte Primzahl ist. Diese Annahme ist falsch, d.h. es gibt mindestens noch eine weitere (größere) Primzahl. Wir nennen sie  $p_1$ .

→Übrigens ist 30031 keine Primzahl, denn  $30011 = 59 \cdot 509$  !!

d.h. wir haben mit 59 und 509 sogar zwei neue größere Primzahlen gefunden !  
Jetzt kannst du weiter überlegen:

**Nehmen wir an, die Zahl  $p_1$  sei die größte ( und damit letzte ) Primzahl.** D.h. es gibt nur die Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, p_1$$

Betrachten wir jetzt die Zahl

$$z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots p_1 + 1$$

Das ist das Produkt aller Primzahlen bis zur Zahl  $p_1$  um 1 vergrößert.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten

**1. Fall :**  $z$  ist eine Primzahl.

In diesem Fall hätten wir eine weitere Primzahl  $> p_1$  gefunden.

**Widerspruch zur Annahme, d.h. die Annahme ist falsch !**

**2. Fall:**  $z$  ist keine Primzahl.

D.h. diese Zahl muss dann noch mindestens einen Teiler außer 1 und  $z$  besitzen, denn eine Zahl die keine Primzahl (und größer als 1) ist, hat mindestens 3 Teiler.

Dieser Teiler lässt sich dann wieder eindeutig als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben. ( → **Primzahlgeheimnis 3** ).

Da weder 2 noch 3 noch 5 noch 7 noch 11 .....noch  $p_1$  Teiler von  $z$  sind, muss es mindestens noch eine weitere Primzahl geben, die größer als  $p_1$  ist und gleichzeitig Teiler von  $z$  ist.

**Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $p_1$  die größte Primzahl ist.**

**D.h. Zu jeder Primzahl findest du immer noch eine größere !**

Aufgabe:

Wenn Euklid schon das **Primzahlgeheimnis 2** (Satz von Tschebyscheff ) gekannt hätte, dann hätte er auch damit begründen können, dass es keine letzte Primzahl geben kann !

Schreibe auf, wie man mit der Kenntnis des Satzes von Tschebyscheff begründen kann, dass es keine letzte Primzahl geben kann:

# Primzahlgeheimnis 5

Goldbachsche Vermutung 2 (aus dem Jahr 1742):

**Jede gerade Zahl  $z \geq 4$  lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben !**

Dieser Satz ist allgemein bis heute noch nicht bewiesen worden. Man weiß aber, dass er bis  $z = 10^{14}$  stimmt !

Christian Goldbach  
(1690-1764)

Weißt du noch, was  $10^{14}$  für eine Zahl ist ?

$10^{14} =$  \_\_\_\_\_

Aufgabe: Zeige die Gültigkeit der Vermutung für folgende Zahlen:  
(Verwende dazu unsere Primzahltablelle)

4	=2+2
6	=3+3
8	=3+5
10	=3+7
12	=5+7
14	
16	
....	
20	
36	
50	
100	
128	
130	
150	

# Primzahlgeheimnis 5

Goldbachsche Vermutung 3 (1742):

**Jede ungerade Zahl größer als 5 lässt sich als Summe dreier Primzahlen schreiben !**

Dieser Satz ist allgemein bis heute noch nicht bewiesen worden.

Christian Goldbach  
(1690-1764)

Aufgabe: Zeige die Gültigkeit der Vermutung für folgende Zahlen:

7	=2+2+3
9	=2+2+5 =3+3+3
11	=3+3+5 =2+2+7
13	=3+5+5 =3+3+7
15	
17	
19	
21	
35	
51	
99	
101	
119	



# Primzahlgeheimnis 6

## Mersenne-Zahlen

Das sind Zahlen der Form  $z = 2^n - 1$  mit  $n \geq 2$

Mersenne hat folgende Entdeckung gemacht :

Ist  $n$  keine Primzahl, dann ist  $z$  auch keine Primzahl !

Ist  $n$  eine Primzahl, dann kann  $z$  eine Primzahl sein ! (muss aber nicht)



Marin Mersenne  
(1588-1648)

Für die ersten Mersenne-Zahlen ist die Überprüfung, ob es sich um Primzahlen handelt, einfach:

n	$2^n - 1$	
2	3	1. Mersenne-Primzahl
3	7	2. Mersenne-Primzahl
4	15	kann keine Primzahl sein, weil 4 keine Primzahl ist
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Mersenne-Zahlen sind ideale Kandidaten für Primzahlen, da es für sie viel einfachere Überprüfungsverfahren gibt, mit denen man zeigen kann, dass es sich um Primzahlen handelt.

→ Die größten bekannten Primzahlen sind alle Mersenne-Zahlen !

Poststempel aus den USA 1968 mit der Meldung

$2^{11213} - 1$  ist eine Primzahl



Den Rekord hielt bis 1998 ein amerikanische Student, der im Januar 1998 die Primzahl  $2^{3021377} - 1$  entdeckte. Das ist eine Zahl mit 909526 Stellen.

Im Jahr 2001 wurde mit  $2^{13.466.917} - 1$  die 39. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 4 053 946 Stellen.

Im Jahr 2003 wurde mit  $2^{20.996.011} - 1$  die 40. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 6 320 430 Stellen.

Im Jahr 2004 wurde mit  $2^{24.036.583} - 1$  die 41. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 7 235 733 Stellen.

Im Jahr 2005 wurde mit  $2^{25.964.951} - 1$  die 42. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 7 816 230 Stellen.

Im Dezember 2005 wurde mit  $2^{30.402.457} - 1$  die 43. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 9 152 052 Stellen.

Im September 2006 wurde mit  $2^{32.582.657} - 1$  die 44. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 9 808 358 Stellen. (Rechenzeit 9 Monate auf 700 Computern)

Liste der bekannten Mersenne-Primzahlen  $2^n - 1$

Nr.	n	Anz.Ziffern von M(n)	Jahr		Nr.	n	Anz.Ziffern von M(n)	Jahr
1	2	1			25	21701	6533	1978
2	3	1			26	23209	6987	1979
3	5	2			27	44497	13395	1979
4	7	3			28	86243	25962	1982
5	13	4	1456		29	110503	33265	1988
6	17	6	1588		30	132049	39751	1983
7	19	6	1588		31	216091	65050	1985
8	31	10	1772		32	756839	227832	1992
9	61	19	1883		33	859433	258716	1994
10	89	27	1911		34	1257787	378632	1996
11	107	33	1914		35	1398269	420921	1996
12	127	39	1876		36	2976221	895932	1997
13	521	157	1952		37	3021377	909526	1998
14	607	183	1952		38	6972593	2098960	1999
15	1279	386	1952		39	13466917	4053946	2001
16	2203	664	1952		40	20996011	6320430	2003
17	2281	687	1952		41	24036583	7235733	2004
18	3217	969	1957		42	25964951	7816230	2005
19	4253	1281	1961		43	30402457	9152052	2005
20	4423	1332	1961		44	32582657	9308358	2006
21	9689	2917	1963					
22	9941	2993	1963					
23	11213	3376	1963					
24	19937	6002	1971					
25	21701	6533	1978					

Seit 1951 mit Computerunterstützung.  
Seit 1996 alle mit dem GIMPS Projekt

GIMPS Great Internet Mersenne Prime Search

## Primzahlgeheimnis 7

### Fermat-Zahlen

Das sind Zahlen der Form  $z = 2^n + 1$  mit  $n \geq 0$

Fermat hat folgende Entdeckung gemacht :

Nur wenn  $n$  selbst eine Zweierpotenz ist, kann  $z$  eine Primzahl sein.



Pierre de Fermat  
1601-1665

Fermat **vermutete**, dass  $z$  immer eine Primzahl ist, wenn  $n$  eine Zweierpotenz ist.

Das stimmt auch für  $n = 2^0$ ;  $n = 2^1$ ;  $n = 2^2$ ;  $n = 2^3$  und  $n = 2^4$

Für  $n = 2^5$  konnte Leonard Euler im Jahr 1732 zeigen, dass  $z = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$  und damit keine Primzahl ist. Die Vermutung war also falsch !

Diese Zerlegungen sind sehr schwer zu finden, da die Fermat-Zahlen schnell sehr groß werden. Ohne Computer lassen sich diese Zerlegungen kaum finden.

Bis heute sind außer den oben genannten Zahlen keine weiteren Fermat-Zahlen bekannt, die Primzahlen sind.

Es ist also ungeklärt, ob es noch weitere Fermat-Primzahlen gibt.

## Primzahlgeheimnis 8

### Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge sind Paare von zwei Primzahlen zwischen denen nur eine gerade Zahl liegt.

Beispiele: (3;5) (5;7) (11;13) .....(p;p+2).....

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Das bisher größte gefundene Zwillingsspaar (Juni 2006) ist

$$( 100314512544015 \cdot 2^{171960} - 1 ; 100314512544015 \cdot 2^{171960} + 1 )$$

Aufgabe:

Suche aus der Primzahltablelle alle Zwillinge bis 1000 heraus.

## Primzahlgeheimnis 9

### Primzahldrillinge

Primzahldrillinge sind Tripel von drei Primzahlen zwischen denen jeweils nur eine gerade Zahl liegt.

Beispiel:  $(3;5;7)$ ..... $(p;p+2;p+4)$ .....

Man kann beweisen, dass es nur einen Primzahldrilling, nämlich  $(3;5;7)$  gibt

Wie lässt sich das beweisen ?

Wenn  $p$  eine beliebige Primzahl  $>3$  ist, dann ist eine der beiden Zahlen  $p+2$  oder  $p+4$  durch 3 teilbar und damit **keine Primzahl**.

Sei also  $p$  eine beliebige Primzahl  $>3$

Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- |  |             |
|--|-------------|
| 1.) $p$ lässt bei der Division mit 3 den Rest 1            | z.B. $p=13$ |
| Dann ist aber $p+2$ mit 3 teilbar und damit keine Primzahl | $p+2=15$    |
| 2.) $p$ lässt bei der Division mit 3 den Rest 2            | z.B. $p=29$ |
| Dann ist aber $p+4$ mit 3 teilbar und damit keine Primzahl | $p+4=33$    |

Aufgabe:

Begründe, warum es keine Primzahlvierlinge, Primzahlfünflinge...u.s.w. geben kann:

## Primzahlgeheimnis 10

### Fast-Primzahldrillinge

Fast-Primzahldrillinge sind Tripel die einen Primzahlzwilling enthalten und eine weitere Primzahl, zwischen der und einer Zwillingzahl höchstens 2 gerade Zahlen liegen:

Beispiel: (5;7;11) (7; 11;13).....(p;p+2;p+4)...(p;p+4;p+6)..

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Fast-Primzahldrillinge gibt.

Aufgabe:

Bestimme alle Fast-Primzahldrillinge bis 100 :

(5;7;11) (7; 11;13)

### Fast-Primzahlvierlinge

Fast-Primzahlvierlinge sind Viertupel die zwei Primzahlzwillinge enthalten zwischen denen höchstens 2 gerade Zahlen liegen:

Beispiel: (5;7;11;13) (11;13;17;19) .....(p;p+2;p+6;p+8).....

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Fast-Primzahlvierlinge gibt.

Bestimme alle Fast-Primzahlvierlinge bis 120 :

# Primzahlgeheimnis 11

## Sophie-Germain-Primzahlen

Eine Primzahl  $p$  heißt so nach der französischen Mathematikerin Sophie Germain (1776-1831) wenn auch die Zahl  $2p+1$  eine Primzahl ist.

Beispiel:

$2$  ist eine Sophie-Germain-Primzahl, weil  $2 \cdot 2 + 1 = 5$  auch prim ist.  
 $1013$  ist eine Sophie-Germain-Primzahl, weil  $2 \cdot 1013 + 1 = 2027$  auch prim ist.

Suche aus der Primzahltablelle die Sophie-Germain-Primzahlen von 2 bis 1013 heraus.

2											

Die größte bekannte Sophie-Germain-Primzahl ist

$70685552^{121301} + 1$  eine Zahl mit 36523 Stellen, die 2005 entdeckt wurde

Markiere in dieser Tabelle die [Sophie-Germain-Primzahlzwillinge](#)